

GEBRA

KMO

$$f(x) = x - T$$

¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
RODO

11

Logaritmos

Teoría y Práctica

A
L





11

Logaritmos

Teoría y Práctica

A
L
G
E
B
R
A



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Juan Carlos Ramos Leyva

FONDO EDITORIAL
ARODO

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

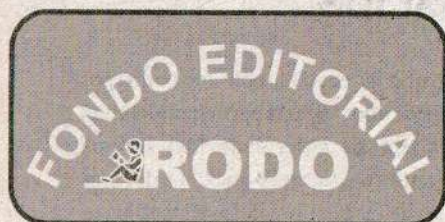
Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2015, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE ÁLGEBRA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO

De: Walter Z. Benítez Nuñez.



ÁLGEBRA - TEMA SELECTO 11, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Julio 2015 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2015 - 10404

EQUIPO PEDAGÓGICO

Juan Carlos Ramos Leyva

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

Luz Victoria Carlos Herrera

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

LOGARITMOS

LOGARITMO (log)

Se define logaritmo de un número positivo "N" en una base "b" positiva y distinta de la unidad como el exponente "α" que debe afectar a dicha base para obtener una potencia igual al número dado inicialmente.

Representación:

$$\log_b N = \alpha \quad \dots (1)$$

Donde: $\log$ = operador de la logaritmación
 N = número propuesto / $N > 0$
 b = base del logaritmo / $b > 0$; $b \neq 1$
 α = logaritmo / $\alpha \in \mathbb{R}$

DE LA DEFINICIÓN:

$$\log_b N = \alpha \Leftrightarrow b^\alpha = N \quad \dots (2)$$

- $\log_2 8 = x \Leftrightarrow 2^x = 8$
 $\therefore x = 3$
- $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x$
 $\therefore x = 25$

TEOREMA: Reemplazando (1) en (2):

$$b^{\log_b N} = N$$

- $5^{\log_5 3} = 3$
- $12^{\log_{12}(x-4)} = x-4 \Leftrightarrow x-4 = 5$
 $\therefore x = 9$

PROPIEDADES GENERALES:

$$1) \quad \forall b > 0; b \neq 1$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$2) \quad \forall b > 0; b \neq 1$$

$$\log_b b = 1$$

OBSERVACIÓN

En $\mathbb{R}$ no existe el logaritmo para números negativos.

- $\log_7(-10)$ ¡No existe en $\mathbb{R}$!

PROPIEDADES OPERATIVAS

1) $\forall M, N > 0; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b M + \log_b N = \log_b (M \cdot N)$$

2) $\forall M, N > 0; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b M - \log_b N = \log_b \left(\frac{M}{N} \right)$$

3) $\forall M > 0; n \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b M^n = n \cdot \log_b M$$

4) $\forall M > 0; n \in \mathbb{R} - \{0\}; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b M = \log_{b^n} M^n$$

CASOS ESPECIALES:

Considerando la existencia de los logaritmos en $\mathbb{R}$, tenemos:

1)

$$\log_{(b^n)} (b^m) = \frac{m}{n}$$

2)

$$\log_{(\sqrt[n]{b})} (\sqrt[n]{b}) = \frac{n}{m}$$

3)

$$n = \log_b b^n$$

SISTEMA DE LOGARITMOS

Un sistema de logaritmos se genera al asumir el parámetro "b" un valor determinado, como: $b > 0; b \neq 1$ es fácil apreciar que existen infinitos sistemas de logaritmos, siendo los usuales los siguientes:

SISTEMA DE LOGARITMOS NATURALES: También llamado sistema de logaritmos neperianos o hiperbólicos, aquí la base es el número inconmensurable e cuyo valor aproximado es: 2,7182

$$\log_e N = \ln N ; N > 0$$

SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMALES: También llamado sistema de logaritmos vulgares o logaritmo de Briggs, aquí la base es el número 10.

$$\log_{10} N = \log N ; N > 0$$

CONVERSIÓN DE SISTEMAS

- 1) De logaritmo natural a decimal

$$\log N = 0,4343 \cdot \ln N ; N > 0$$

- 2) De logaritmo decimal a natural

$$\ln N = 2,3026 \cdot \log N ; N > 0$$

CAMBIO DE BASE

Dado un logaritmo en base "b" se le podrá representar en base "m" según la relación:

$$\log_b N = \frac{\log_m N}{\log_m b}$$

Donde: $N > 0 \wedge \{m, b\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$

• $\log_3 12$ en base 5 será: $\log_3 12 = \frac{\log_5 12}{\log_5 3}$

CASO ESPECIAL: $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

• $\log_7 18 = \frac{1}{\log_{18} 7}$

• $\log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5}$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

REGLA DE LA CADENA: Asumiendo la existencia de cada uno de los factores en el conjunto $\mathbb{R}$, se cumple:

$$\log_b a \cdot \log_a c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_b e$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 &= \log_2 8 \\ &= \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 \\ &= 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

PROPIEDAD ADICIONAL: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ / b \neq 1$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$\bullet \quad 5^{\log_7 12} = 12^{\log_7 5} \qquad \bullet \quad 3^{\log 15} = 15^{\log 3}$$

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Analizaremos cada uno de los casos frecuentes, veamos:

1° Caso: $\log_b x = a$

Se cumple: $x > 0 \wedge b > 0, b \neq 1$

Se plantea: $b^a = x$

2° Caso: $\log_b x = \log_b y$

Se cumple: $x > 0, y > 0 \wedge b > 0, b \neq 1$

Se plantea: $x = y$

3° Caso: $b^x = a$

Se cumple: $a > 0 \wedge b > 0, b \neq 1$

Se plantea: $\log_b b^x = \log_b a$

$$x \cdot \log_b b = \log_b a$$

$$\therefore x = \log_b a$$

INECUACIONES EXPONENCIALES

Analizaremos cada uno de los casos existentes, veamos:

1° Caso: Siendo $0 < b < 1$

$$b^x < b^y \Rightarrow x > y \quad ; \quad b^x \leq b^y \Rightarrow x \geq y$$

$$b^x > b^y \Rightarrow x < y \quad ; \quad b^x \geq b^y \Rightarrow x \leq y$$

2° Caso: Siendo $b > 1$

$$b^x < b^y \Rightarrow x < y \quad ; \quad b^x \leq b^y \Rightarrow x \leq y$$

$$b^x > b^y \Rightarrow x > y \quad ; \quad b^x \geq b^y \Rightarrow x \geq y$$

INECUACIONES LOGARÍTMICAS

Analizaremos cada uno de los casos existentes, veamos:

1° Caso: Siendo $0 < b < 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$

$$\log_b x < \log_b y \Rightarrow x > y \quad ; \quad \log_b x \leq \log_b y \Rightarrow x \geq y$$

$$\log_b x > \log_b y \Rightarrow x < y \quad ; \quad \log_b x \geq \log_b y \Rightarrow x \leq y$$

2° Caso: Siendo $b > 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0$

$$\log_b x < \log_b y \Rightarrow x < y \quad ; \quad \log_b x \leq \log_b y \Rightarrow x \leq y$$

$$\log_b x > \log_b y \Rightarrow x > y \quad ; \quad \log_b x \geq \log_b y \Rightarrow x \geq y$$

COLOGARITMO (colog)

Teniendo en cuenta que: $N > 0 \wedge b > 0, b \neq 1$

Se define el cologaritmo del número "N" en la base "b" de la manera siguiente:

$$\text{colog}_b N = -\log_b N = \log_b \left(\frac{1}{N} \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{colog}_{125} 25 &= -\log_{125} 25 \\ &= -\log_{(5^3)} (5^2) \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

ANTILOGARITMO (antilog)

También llamado exponencial, considerando que $N \in \mathbb{R} \wedge b > 0, b \neq 1$. Se define el antilogaritmo del número "N" en la base "b" de la manera siguiente:

$$\text{anti log}_b N = \exp_b N = b^N$$

$$\bullet \quad \text{anti log}_2 4 = 2^4 = 16 \qquad \bullet \quad \exp_3(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

RELACIÓN ENTRE OPERADORES:

Teniendo en cuenta que $\{x; b\} \subset \mathbb{R}^+ / b \neq 1$ se cumple:

- | | |
|---|---|
| 1) $\text{anti log}_b (\log_b x) = x$ | 3) $\log_b (\text{anti log}_b x) = x$ |
| 2) $\text{anti log}_b (\text{co log}_b x) = x^{-1}$ | 4) $\text{co log}_b (\text{anti log}_b x) = -x$ |

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

FUNCIÓN EXPONENCIAL

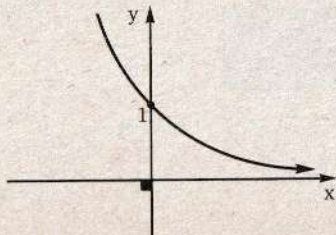
Siendo "b" un número positivo distinto de la unidad.

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = \exp_b(x) = b^x$$

Donde: $D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = (0; \infty)$

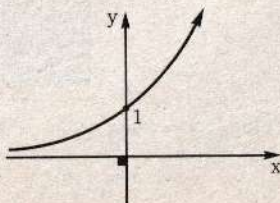
ANÁLISIS DE LA GRÁFICA:

1) $F: y = F(x) = b^x; 0 < b < 1$



La función es decreciente

2) $F: y = F(x) = b^x; b > 1$



La función es creciente

**OBSERVACIÓN**

La función exponencial es monótona e inyectiva, por lo último se afirma que dicha función admite inversa.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

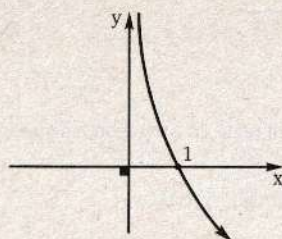
Siendo "b" un número positivo distinto de la unidad

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = \text{Log}_b x$$

Donde: $D_F = \mathbb{R}^+ = \langle 0; \infty \rangle \wedge R_F = \mathbb{R}$

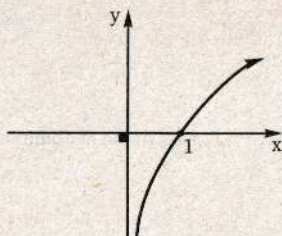
ANÁLISIS DE LA GRÁFICA:

1) $F: y = F(x) = \log_b x; 0 < b < 1$



La función es decreciente

2) $F: y = F(x) = \log_b x; b > 1$



La función es creciente

**OBSERVACIÓN**

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial y viceversa.

Ejemplo 1: Dada la función: $y = f(x) = \pi^{x-1} + 2$. Determine su rango.

Resolución: De acuerdo con la teoría:

$$\pi^{x-1} > 0; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sumando dos a ambos miembros:

$$\pi^{x-1} + 2 > 0 + 2$$

$$y > 2$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = \langle 2; \infty \rangle$$

Ejemplo 2: Sean las funciones:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = F(x) = \sqrt{5}^{x-2}$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = G(x) = 25^{x+1}$$

Determine el punto de intersección de las gráficas de F y G.

Resolución: De acuerdo con la teoría:

$$F(x) = G(x)$$

$$\sqrt{5}^{x-2} = 25^{x+1} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-2}{2}} = 5^{2x+2}$$

$$\frac{x-2}{2} = 2x+2 \Leftrightarrow x-2 = 4x+4$$

$$-6 = 3x \Leftrightarrow x = -2$$

Ahora para la ordenada:

$$y = F(x) = \sqrt{5}^{x-2}$$

$$y = F(-2) = \sqrt{5}^{-4} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$\therefore P: \left(-2; \frac{1}{25}\right)$$

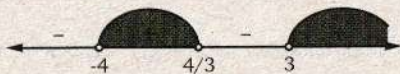
Ejemplo 3: Determine el dominio de la función cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \log \left(\frac{x^2 + x - 12}{3x - 4} \right)$$

Resolución: De acuerdo con la condición de existencia se establece lo siguiente:

$$\frac{x^2 + x - 12}{3x - 4} > 0$$

$$\frac{(x+4)(x-3)}{3x-4} > 0$$



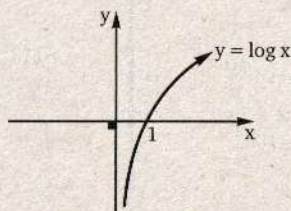
$$x \in \left(-4; \frac{4}{3}\right) \cup (3; \infty)$$

$$\therefore D_F = \left(-4; \frac{4}{3}\right) \cup (3; \infty)$$

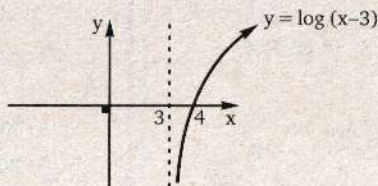
Ejemplo 4: Esbozar la gráfica de la función real de variable real F , cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = -\log(-x - 3)$$

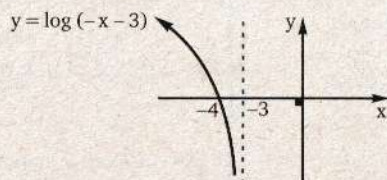
Resolución: Construimos la gráfica de F a partir de la gráfica de funciones básicas:



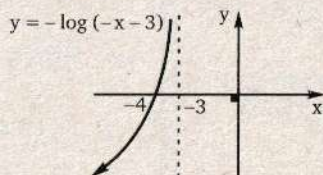
Desplazando 3 unidades a la derecha:



Simetría con respecto al eje y:



Finalmente simetría con respecto al eje x:



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el logaritmo de $\sqrt[3]{4}$ en base $\sqrt[5]{8}$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{4}$ C) $\frac{10}{9}$
D) $\frac{11}{9}$ E) $\frac{8}{3}$

2. Calcular x en:
 $\text{Log}_x (x+6) = 2$

A) 10 B) -2 C) 3
D) -2 ó 3 E) 4

3. Resolver:

$$5^{\log_5(2x-1)} = x^2 + x - 13$$

A) $\{-3; 4\}$ B) $\{-4; 3\}$ C) $\{3\}$
D) $\{4\}$ E) $\{5\}$

4. Reducir:

$$E = \log_{25} 5 + \log_{\sqrt[3]{2}} 2$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

5. Reducir:

$$E = \log_x \sqrt[6]{x} + \log_x \sqrt[12]{x} + \log_x \sqrt[20]{x};$$

$$x > 1$$

A) $\frac{7}{10}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{10}$
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{3}{10}$

6. Resolver:

$$[2^{\log_8(2x+15)}]^3 = 4x+13$$

A) $\{3\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{-1\}$
D) $\{1\}$ E) $\{2\}$

7. Si:

$$\log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \log\left(1-\frac{1}{4}\right) + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \dots$$

$$\dots + \log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -3$$

Determinar "n"

A) 2000 B) 4000 C) 1000
D) 200 E) 100

8. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Simplificar:

$$\frac{\frac{\log(\log x^{-1})}{x \log x} + \frac{\log(\log y^{-1})}{y \log y} + \frac{\log(\log z^{-1})}{z \log z}}{\log(xyz)}$$

A) 0 B) -1 C) 1
D) 2 E) -2

9. Si $\log_4 y = 2$. Calcular "x" en:

$$\log_4 \left(\frac{x^2 y^3}{16} \right) = 5$$

A) 1 B) 2 ó -2 C) 1 ó -1
D) 1 ó 2 E) -2

10. Reducir:

$$E = \frac{3}{\log_2 45 + 3} + \frac{2}{\log_3 4 + 2} + \frac{3}{\log_5 72 + 1}$$

- A) 2 B) -1 C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

11. Resolver:

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x-5) > -2$$

- A) [5;9] B) (5;9)
C) (1;9)
D) $(-\infty; 5)$ E) $(-\infty; 5] \cup (9; \infty)$

12. Resolver:

$$\log_3(7-x) > 0$$

- A) $(-\infty; 6]$ B) $(-\infty; 7)$ C) $(7; \infty)$
D) $(6; \infty]$ E) $(-\infty; 6)$

13. Si "a" es la característica de $\log 539$ y "b" es la característica de $\log 0,0089$. Calcular ab.

- A) 2 B) 4 C) -4
D) 6 E) -6

14. Resolver: $\log(3x-2) = \log(x+1)$

- A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ C) $\left\{\frac{3}{4}\right\}$
D) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$ E) $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

15. Resolver:

$$\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 4x) > 2$$

- A) $(-\infty; -1) \cup (5; \infty)$
B) $(-\infty; -2) \cup \{6\}$
C) $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$
D) $(-\infty; -2) \cup \{0\}$
E) $(-\infty; -1) \cup (4; \infty)$

16. Reducir:

$$E = \text{Co log}_{\sqrt[3]{7}} 7 + \text{Anti log}_4(-0,5)$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $-\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

17. Determine la base del sistema de logaritmos que hace corresponder a cada término de las progresiones.

$$\begin{aligned} &\leftrightarrow 1:2:4:8:16:\dots \\ &\leftrightarrow 0.1.2.3.4.\dots \end{aligned}$$

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) $\sqrt[4]{2}$ E) 3

18. Resolver:

$$\log_2^2 x - 6|\log_2 x| - 16 \geq 0$$

- A) $(-\infty; 2^8]$ B) $(0; 2^{-8}] \cup [2^8; \infty)$
C) $[2^{-8}; 2^8]$
D) $(0; 2^8]$ E) $(-\infty; 2^{-8}]$

19. Determinar el dominio de la siguiente función:

$$y = F(x) = \log(\sqrt{x-4}) + \sqrt{6-x}$$

- A) $[-4; 0)$ B) $[4; 6]$ C) $\langle 4; 6)$
D) $[4; \infty)$ E) $[6; \infty)$
20. Si $\log 2 = a$ y $\log 3 = b$. Calcular en términos de "a" y "b" $\log 48$.

- A) $a+4b$ B) $4a+b$ C) $2a+b$
D) $3a+2b$ E) $a+3b$

21. Calcular el logaritmo de 25 en base 125

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{2}{5}$

22. Calcular x en:

$$\log_{\sqrt{3}}(2x+1) = 4$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

23. Calcular x en:

$$\log_2(x+2) + \text{Colog}_2(x-1) = 2$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

24. El equivalente de:

COLUMNA (A)

$$\text{Antilog}_{25}(\text{Antilog}_4(-0.5))$$

COLUMNA (B)

$$\text{Colog}_3(\text{Antilog}_3(-5))$$

- A) A es mayor que B
B) A es menor que B
C) A es igual que B
D) ¡No utilizar esta opción!
E) No se puede determinar

25. Si: $a^3 b^3 = a+b$; $ab \neq 1$; $a+b > 0$
Calcular "x" de:

$$(a+b)^{\log_{ab} x} = 64$$

- A) 7 B) 2 C) 6
D) 4 E) 5

26. Calcular el logaritmo en base 16 del logaritmo de $2\sqrt{2}$ en base 8.

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$
D) $-\frac{9}{4}$ E) $-\frac{1}{4}$

27. Resolver:

$$\frac{\log_7(x^2 + 9x - 5)}{\log_7 \sqrt[5]{x+4}} = 10$$

- A) {19} B) {20} C) {21}
D) {22} E) {23}

28. Si: $a > b > c > 1$, simplificar:

$$\frac{\log_c a + 1}{\log_c b \cdot \log_b a^2 c^2}$$

- A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) 4 E) $\frac{1}{8}$

29. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \log x - \log y = \log 2 & \dots (1) \\ 2^{x+y} - 64 = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

- A) $\{(4; 2)\}$ B) $\{(2; 4)\}$
 C) $\{(6; 4)\}$
 D) $\{(4; 10)\}$ E) $\{(2; 2)\}$

30. Calcular:

$$\text{Colog}_6 \text{Antilog}_3(\log_3 12 + 1)$$

- A) -5 B) -3 C) -2
 D) -1 E) -6

31. Simplificar:

$$\frac{(e^x + e^y + e^z) \cdot (x + y + z)}{e^{\ln(z-y)} + e^{\ln(z-x)} + e^{\ln(x+y)}}$$

$$\text{Siendo: } x = \ln 3; y = \ln 5; z = \ln 15$$

- A) 21 B) 22 C) 23
 D) 25 E) 30

32. Si:
- $\log 2 = 0,30103$

Calcular:

$$\log \sqrt[4]{781,25}$$

- A) 0,7231975 B) 0,7329512
 C) 0,7259175
 D) 0,7194257 E) 0,7453214

33. Resolver:

$$\log_2(x-4) < 1$$

- A) $\langle 0; 3 \rangle$ B) $\langle 2; 5 \rangle$ C) $\langle 3; 7 \rangle$
 D) $\langle 4; 6 \rangle$ E) $\langle 4; 8 \rangle$

34. Calcular:

$$\left[\log_3 2 \sqrt[4]{\log_2 3 \sqrt[3]{9}} \right]^{\log_6 5}$$

- A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 25
 D) 125 E) $5\sqrt{5}$

35. Reducir:

$$\frac{1 + \log_5 7}{1 - \log_5 7} + \frac{1 + \log_7 5}{1 - \log_7 5}$$

- A) $\log 7$ B) $\log 5$ C) 0
 D) 1 E) 2

36. Calcular:

$$\log_{16} \log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \log_{\sqrt{8}} \log_{\sqrt{2}} 2$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$
 D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{1}{8}$

37. El antilogaritmo de:

$$\frac{1}{2}(2 \log a + \log b - 3 \log c)$$

 $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$ es:

- A) $\frac{a}{c} \sqrt{\frac{b}{c}}$ B) $\frac{a}{c} \sqrt{\frac{c}{b}}$ C) $\frac{a}{b} \sqrt{\frac{c}{b}}$
 D) $\frac{c}{a} \sqrt{\frac{b}{c}}$ E) $\sqrt{\frac{ab}{c}}$

38. Si
- $a > 1$
- , tal que:

$$\log_a 5 \sqrt[5]{\left[a(2-\sqrt{3})^2\right]^2} = \frac{1}{2}$$

Cuál es el valor de:

$$\log_a \sqrt{a(2+\sqrt{3})^5}$$

- A) $\frac{35}{16}$ B) $\frac{16}{35}$ C) $\frac{7}{8}$
 D) $\frac{8}{7}$ E) $\frac{37}{19}$

39. Calcular "x" en:

$$\log_{2x} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \log_{\left(\frac{1}{x} \right)} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

40. Resolver:

$$\log \sqrt{x+14} + \log \sqrt{x+7} - \log 1,2 = 1$$

- A) {2; 23} B) {2; -23}
 C) {-2}
 D) {2} E) {2; -3}

41. Calcular "x" en:

$$\log_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1)$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) A ó B

42. Resolver:

$$\log(2x-1)^n + \log(x-1)^{10 \log n} = n$$

Siendo "n" un impar positivo.

- A) $\left\{ -\frac{3}{2}; 3 \right\}$ B) $\left\{ \frac{3}{2}; 3 \right\}$
 C) $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$
 D) {3} E) { }

43. Calcular "x" de:

$$\log_2 x + \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x^2 = \frac{15}{2}$$

- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 6 E) 7

44. Si:

$$\log_a 3 = \log_b 2 \wedge ab = 10$$

Calcular "b"

- A) $\log \sqrt[2]{3}$ B) $\log \sqrt[3]{2}$ C) $\log \sqrt[6]{6}$
 D) $\log \sqrt[6]{2}$ E) $\log \sqrt[6]{3}$

45. Calcular el producto de las raíces de la siguiente ecuación:

$$\frac{100^{\log x} + 1}{10^{\log_{100} x^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

- A) 1 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{2}$
 D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

46. Resolver:

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$$

A) $\left\{100; \frac{1}{100}\right\}$ B) $\left\{10; \frac{1}{10}\right\}$

C) $\{100\}$

D) $\left\{\frac{1}{100}\right\}$ E) $\{1000\}$

47. Resolver:

$$x^{\log x} = \left(\frac{10^3}{x}\right)^4$$

A) $\{10^{-2}; 10^2\}$ B) $\{10^{-4}; 10^3\}$

C) $\{10^{-2}; 10^6\}$

D) $\{10^{-6}; 10^2\}$ E) $\{10^{-6}; 10\}$

48. Si: $a > 1$, resolver:

$$(\log_a ax^2)(\log_a a^2x) = \log_a \left(\frac{1}{a}\right) a^{-10}$$

A) $\{a; a^2\}$ B) $\{\sqrt{a}; a^2\}$

C) $\{\sqrt{a}; a\}$

D) $\{a\sqrt{a}; a\}$ E) $\{\sqrt{a}; a^3\}$

49. Calcular "x"

$$\log_a \log_a x + \log_a x \cdot \log_a x = a$$

$$a > 1$$

A) a B) a^a C) a^{a+1}

D) a^{a-1} E) a^a

50. Si: $x > y$, calcular $\log_{2\sqrt{y}} \sqrt{x}$ a partir del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \dots\dots (1) \\ \log x + \log y = 2 \dots\dots (2) \end{cases}$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

51. Calcular:

$$E = \log_5 2 \cdot \log_2 2 + \log_2 5 \cdot \log_5 - \log_2 10 \cdot \log_2 10$$

A) -3 B) 10 C) 4

D) -15 E) -6

52. Si $x, y > 0$ tal que:

$$\log_3 x^2 = a \wedge \log_3 y^2 = b$$

Calcular:

$$E = 20 \log_9 \left(10 \sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

A) $a - b$ B) $\frac{a - b}{4}$ C) $\frac{a + b}{2}$

D) $\frac{a - b}{2}$ E) $2(a + b)$

53. Si $\log_3 5 = a \wedge \log_3 2 = b$. Calcular $\log_3 (2, 7)$ en función de "a" y "b".

A) $a + b - 2$ B) $a - b + 1$

C) $a - b + 3$

D) $3 - a - b$ E) $a + b + 1$

54. Calcular:

$$E = \log_{(0,4)} \frac{1}{5} \sqrt[3]{50} + \log_{(0,32)} \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{4}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

55. Resolver:

$$2\log(2x+2) - 2 = \log\left(1 + \frac{12x}{25}\right)$$

- A) {6} B) {-2} C) {12}
D) {-2; 12} E) {10}

56. Luego de resolver el sistema:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 8 \dots (1) \\ x^{\log y} = 10^7 \dots (2) \end{cases}$$

Calcular el mayor valor de $\frac{x}{y}$

- A) 10^2 B) 10^8 C) 10^6
D) 10^7 E) 10^9

57. Si
- $10^x = 18 \wedge 10^y = 12$
- . Calcular
- $\log 6$

- A) $x+y$ B) $\frac{x+y}{2}$ C) $\frac{x+y}{3}$
D) $\frac{x-y}{2}$ E) $2x+2y$

58. Resolver:

$$x \log 3 + 4 \log(\log 5) = 4 \log(\log 125)$$

- A) {4} B) {3} C) {5}
D) {6} E) {10}

59. Si:

$$\log(\log(\log x)) = \log_x(\log_3 2 \log_2 3)$$

Calcular $10^{\sqrt{x}}$.

- A) $10^{\sqrt{10}}$ B) 10 C) 10^{10}
D) $10\sqrt{10}$ E) $\sqrt{10}$

60. Si se cumple que:

$$\log\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) = \log a + \log b; a, b > 1$$

Calcular $E = \log_b a + \log_a b + 20$

- A) 22 B) 0 C) 7
D) 8 E) 4

61. Calcular:

$$E = \sqrt[3]{5^{\frac{1}{\log 5}} + \frac{17}{\sqrt{-\log\left(\frac{1}{10}\right)}}$$

- A) $\sqrt[3]{2}$ B) 2 C) $\sqrt[3]{4}$
D) $\sqrt[3]{5}$ E) 3

62. Sabiendo que
- $x = 8^{\log_{27} x^a}$
- ;
- $x, a > 0$
- .
-
- Calcular
- $\log_{12} 2$
- en términos de "a".

- A) $\frac{1}{a+1}$ B) $\frac{1}{2a}$ C) $\frac{1}{a+2}$
D) $\frac{1}{a-1}$ E) $\frac{1}{a-2}$

63. Calcular:

$$\sqrt{\frac{1}{\log_2 15+1} + \frac{1}{\log_3 10+1} + \frac{1}{\log_5 6+1}}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$
D) 3 E) 1

64. Sabiendo que:
- $a = x^{\log y} \wedge b = y^{\log x}$

$$\text{Simplificar: } E = \frac{\log\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\log(ab)}$$

- A) $\frac{1}{4}$ B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) 2 E) 6

65. Sea la función:
- $F(x; y) = 2x - 6y$

Calcular x^2 , si: $F(\log_5 x; \log_5 x) = -4$

- A) 1 B) 5 C) $\sqrt{5}$
D) 25 E) $\sqrt{10}$

66. Reducir:

$$\log_4^{-1} \log_2 \log_2^2 \text{ antilog}_4 (\log_{1,4} 1,96)$$

- A) 1 B) 4 C) 2
D) -1 E) $\frac{1}{2}$

67. Luego de resolver:
- $\ln(e^2 - 1 + e^{2-x}) \geq x$

Indicar el número de elementos enteros positivos que tiene el conjunto solución.

- A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 10

68. Si
- $\log_3 a = \frac{1}{2}$
- . Determinar el valor de

$$"b". \text{ De modo que: } \log_3 \left(\frac{\sqrt{ab}}{9} \right) = -\frac{3}{2}$$

- A) 9 B) 3 C) 1
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{3}$

69. Resolver:
- $0 < \log_6 \left(\frac{3x+10}{x+7} \right) < \log_6 2$

- A) $\left(-\frac{3}{4}; 4\right)$ B) $\left(-\frac{3}{2}; 4\right)$ C) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$
D) $\left(-\frac{3}{2}; 9\right)$ E) $\left(-4; \frac{3}{2}\right)$

70. Determinar la suma de las soluciones reales de la ecuación

$$\log_6 (\log_5 (\log_4 (\log_3 (\log_2 (2x-x^2)))) = 0$$

- A) 6 B) 2 C) 0
D) 10 E) 36

71. El equivalente de:
- $\sum_{k=2}^{66} \left(\frac{1}{\log_k 66!} \right)$
- es:

- A) 66 B) 1 C) 0
D) 11 E) 6

72. Si
- $a, b, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- , de modo que
- $abc=1$
- . Calcular:

$$\sqrt[4]{\frac{\log^3 a^3 + \log^3 b^3 + \log^3 c^3}{\log a^{\log b \log c}}}$$

- A) 1 B) 3 C) $\sqrt[4]{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt[4]{27}$

73. Sabiendo que:

$$(a+b)^{-1} + (b-a)^{-1} = 2b^{-1}; b > a.$$

Simplificar:

$$\frac{\log\left(\frac{a+b}{2b}\right) + \log\left(\frac{a^2+2b}{4b}\right) + \log\left(\frac{a^3+4b}{8b}\right)}{\log\left(\frac{a^6+3b}{6b}\right)}$$

- A) 6 B) $\frac{3}{2}$ C) 3
D) 1 E) $\frac{3}{4}$

74. Si
- $\log 2 = a$
- y
- $\log 3 = b$
- .

Calcular: $\log_{5!} 6!$

- A) $\frac{2a+3b+1}{a+b+1}$ B) $\frac{3a+b+1}{2a+b+1}$
C) $\frac{a+2b+1}{a+b+1}$
D) $\frac{3a+2b+1}{2a+b+1}$ E) $\frac{a+3b+1}{a+2b+1}$

75. Si
- $\log_{(xy)} x = 4$
- . Calcular:
- $\log_{(xy)} \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y}}\right)$

- A) $\frac{23}{14}$ B) $\frac{29}{15}$ C) $\frac{28}{15}$
D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{16}{15}$

76. Calcular "x" en:

$$\text{anti log}_x \text{ anti log}_{\sqrt[4]{2}} \text{ anti log}_2 3 = 625$$

- A) 25 B) 5 C) $\sqrt[4]{25}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{125}$

77. Resolver:
- $|\log_5 x|^2 + 5|\log_5 x| < 14$

- A) $\left(\frac{1}{25}; 25\right)$ B) $\left(\frac{1}{5}; 25\right)$ C) $\left(\frac{1}{25}; 5\right)$
D) $\langle 1; 5 \rangle$ E) $\left(\frac{1}{5}; 5\right)$

78. Luego de resolver la inecuación

$$4^{x-1} - 2^{x-1} \leq 56$$

Determine la longitud de su conjunto solución.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

79. Determinar el dominio de la función

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | y = f(x) = \log_2 \sqrt{1-x^2}$$

- A) $\langle 0; 1 \rangle$ B) $\langle -1; 2 \rangle$ C) $\langle -1; 1 \rangle$
D) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ E) $\langle -2; 2 \rangle$

80. Determinar el rango de la función cuya fórmula es:

$$y = F(x) = \log_3(x-1) + 1; x \in \langle 4; 82 \rangle$$

- A) $\langle 1; 4 \rangle$ B) $\langle 0; 3 \rangle$ C) $\langle 2; 5 \rangle$
D) $\langle 2; 5 \rangle$ E) $\langle 3; 5 \rangle$

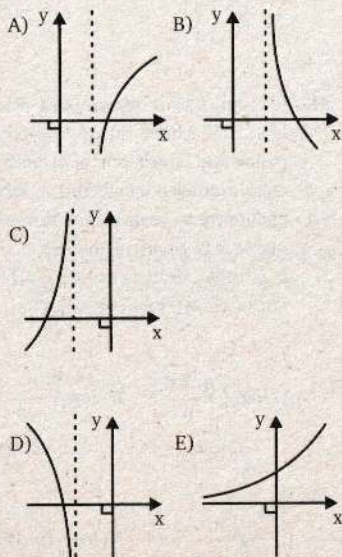
81. Resolver:
- $\log_2 \cos(2x) - \log_2(\text{sen} x) =$
-
- $= 1 + \log_2(\cos x)$

- A) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ C) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$
D) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ E) $\left\{\frac{\pi}{8}\right\}$

82. Determine el dominio de la función F donde:

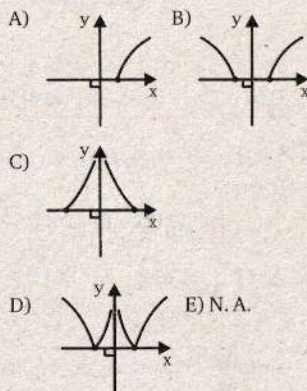
$$F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \mid y = F(x) = \log\left(\frac{x^2 + x - 12}{3x - 4}\right)$$

- A) $\left(\frac{3}{4}; 3\right)$
 B) $\left(-3; \frac{4}{3}\right) \cup [2; \infty)$
 C) $\left(-4; \frac{4}{3}\right) \cup (3; \infty)$
 D) $(-1; 1) \cup (3; \infty)$
 E) $\left(-5; \frac{4}{3}\right) \cup (4; \infty)$
83. Esbozar aproximadamente la gráfica de la función real de variable real de correspondencia es:
 $F: y = F(x) = -\log(-x-3)$

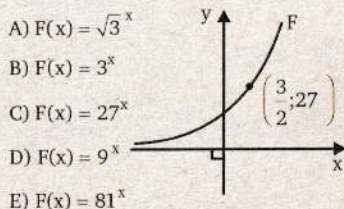


84. Esbozar aproximadamente la gráfica de la función F donde:

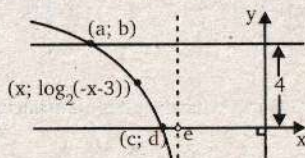
$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = F(x) = |\log_3 |x||$$



85. Determinar la regla de correspondencia de cierta función exponencial cuya gráfica es:



86. A partir de la gráfica:



Calcular: $a + b + c + d + e$

- A) 21 B) -21 C) -22
 D) -23 E) -24

87. Cuántas soluciones tiene el sistema:

$$\begin{cases} \log^2(xy) - \log^2\left(\frac{x}{y}\right) = 8 \dots\dots (1) \\ 2^{\log x} = 4^{\log y} \dots (2) \end{cases}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 8

88. Determine el menor "x" entero a partir de:

$$\log_{(0,3)}(2x+5) + 2 < 0$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

89. Cuántas cifras tiene el resultado de efectuar:

$$5^{40} \cdot 2^{80}$$

- A) 64 B) 65 C) 66
D) 57 E) 53

90. Resolver:

$$\log_x \left(\frac{\ln x - e}{\ln x + e} \right)^{\log x} = \ln \left(\frac{1}{e} \right)$$

- A) $\{\sqrt[9]{e}\}$ B) $\{\sqrt[1]{e^{-9}}\}$ C) $\{\sqrt[1]{e^{-9e}}\}$
D) $\{\sqrt[9]{e^{-11e}}\}$ E) $\{\sqrt[9]{e^{-7e}}\}$

91. Cuántas soluciones tiene la ecuación:

$$e^{3x} - 2e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

92. Determine el área de la región que describen en el plano Gausseano los números complejos
- $\mathbb{Z}$
- que verifican la

$$\text{desigualdad: } \log_{\sqrt{3}} \left(\frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} \right) \leq 2$$

- A) $5\pi u^2$ B) $10\pi u^2$ C) $15\pi u^2$
D) $20\pi u^2$ E) $25\pi u^2$

93. Resolver:
- $\log_3|3-4x| > 2$

A) $\left\langle -\infty; -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \{3; \infty\}$

B) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{2} \right\rangle \cup \{1; \infty\}$

C) $\left\langle -\infty; \frac{3}{2} \right\rangle \cup \{2; \infty\}$

D) $\left\langle -\infty; -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \{2; \infty\}$

E) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{4} \right\}$

94. Se contrata un obrero para cavar en busca de fósiles, al que se promete pagar "m" soles por el primer fósil encontrado y por cada nuevo fósil que encuentre se le pagará el doble de lo que se le pagó por el anterior. ¿Cuántos fósiles encontró, sabiendo que en total recibió "n" soles?

A) $\log_2 \left(\frac{m+n}{n} \right)$ B) $\log_2 \left(\frac{m+n}{m} \right)$

C) $\log \left(\frac{m+n}{n} \right)$

D) $\log \left(\frac{m+n}{m} \right)$ E) $\log_m (m+n)$

95. $\sin \in \mathbb{Z}^+ \wedge N \in \mathbb{N} | N \geq 2016$

Simplificar:

$$\frac{\sqrt[n]{\log 2} + \sqrt[n]{\log 3} + \sqrt[n]{\log 4} + \dots + \sqrt[n]{\log N}}{\sqrt[n]{\ln 2} + \sqrt[n]{\ln 3} + \sqrt[n]{\ln 4} + \dots + \sqrt[n]{\ln N}}^n$$

- A) $\log e$ B) 1 C) $2 \log e$
D) n E) $n \log e$

96. ¿Cuántos ceros a partir de la coma decimal tiene la siguiente potencia:

$(0,5)^{70}$?

- A) 19 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

97. Resolver: $\log_2(3x+2) - \log_2(1-2x) > 2$

- A) $\left(\frac{2}{11}; \frac{1}{2}\right)$ B) $\left(\frac{1}{11}; \frac{1}{2}\right)$ C) $\left(\frac{3}{11}; \frac{1}{3}\right)$
D) $\left(\frac{7}{11}; 1\right)$ E) $\mathbb{R}^+$

98. Las estrellas se clasifican de acuerdo a categorías de brillo "m" llamadas magnitudes y flujos luminoso "L". A las estrellas más débiles (con flujo luminoso L_0) se les asigna magnitud 6. La relación entre la magnitud de brillo "m" y el flujo luminoso "L" esta dada por la fórmula:

$$m = k_0 - \frac{5}{2} \log \left(\frac{L}{L_0} \right)$$

Calcular "m" si: $L = 10^{0.8} L_0$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

99. Resolver:

$$\log \left(\frac{25-x^2}{16} \right) \left(\frac{24-2x-x^2}{14} \right) > 1$$

- A) $\langle -3; 0 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$
B) $\langle -3; 1 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$
C) $\langle -4; -1 \rangle \cup \langle 1; 4 \rangle$
D) $\langle -3; 0 \rangle \cup \langle 0; 3 \rangle$
E) $\mathbb{R} - \{-3; 1; 4\}$

100. Resolver:

$$2^{\log_x \left(\frac{2}{x} \right)} \cdot \left(\frac{2^7}{x^6} \right)^{\log_x 2} \geq x$$

- A) $\left[0; \frac{1}{256} \right] \cup \langle 1; 2 \rangle$
B) $\left[0; \frac{1}{128} \right] \cup \langle 1; 3 \rangle$
C) $\langle 0; 1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$
D) $\langle -1; 1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle$
E) $\left[0; \frac{1}{256} \right] \cup [1; 2]$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:** Sea " α " el logaritmo pedido, luego se cumple:

$$\log_{\sqrt[5]{8}} \sqrt[3]{4} = \alpha$$

Según la definición tenemos:

$$\sqrt[5]{8}^{\alpha} = \sqrt[3]{4}$$

$$2^{\frac{3\alpha}{5}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{3\alpha}{5} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{10}{9}$$

Rpta.: C**Resolución 2:** De acuerdo con la definición:

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3 \vee x = -2$$

Como x es base no aceptamos $x = -2$

$$\therefore x = 3$$

Rpta.: C**Resolución 3:** Por existencia:

$$2x - 1 > 0$$

$$2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2} \dots\dots (1)$$

Por teorema:

$$2x - 1 = x^2 + x - 13$$

$$0 = x^2 - x - 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

$$x = 4 \vee x = -3 \dots\dots (2)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$x = 4$$

$$\therefore CS = \{4\}$$

Rpta.: D

Resolución 4: Dando uso de las propiedades para los logaritmos:

$$E = \log_{\sqrt{25}} \sqrt{5} + \log_{(\sqrt[3]{2})^3} (2)^3$$

$$E = \log_5 5^{\frac{1}{2}} + \log_2 2^3$$

$$E = \frac{1}{2} \log_5 5 + 3 \cdot \log_2 2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 + 3 \cdot 1$$

$$E = \frac{1}{2} + 3$$

$$\therefore E = \frac{7}{2}$$

Rpta.: D

Resolución 5: Dando uso de las propiedades para los logaritmos:

$$E = \log_x x^{\frac{1}{6}} + \log_x x^{\frac{1}{12}} + \log_x x^{\frac{1}{20}}$$

$$E = \frac{1}{6} \cdot \log_x x + \frac{1}{12} \log_x x + \frac{1}{20} \log_x x$$

$$E = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{1}{20} \cdot 1$$

$$E = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

$$E = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}$$

$$E = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$E = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{2 \cdot 5}$$

$$\therefore E = \frac{3}{10}$$

Rpta.: E

Resolución 6: La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\left[2^3\right]^{\log_8(2x+15)} = 4x + 13$$

$$8^{\log_8(2x+15)} = 4x + 13$$

$$2x + 15 = 4x + 13$$

$$2 = 2x$$

$$1 = x$$

$$\therefore CS = \{1\}$$

Rpta.: D

Resolución 7: La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) + \log\left(\frac{4}{5}\right) + \dots + \log\left(\frac{n-1}{n}\right) = -3$$

$$\log\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right) \dots \left(\frac{n-1}{n}\right)\right] = -3$$

Simplificando al número propuesto, tenemos:

$$\log\left(\frac{2}{n}\right) = -3$$

$$10^{-3} = \frac{2}{n}$$

$$\frac{1}{1000} = \frac{2}{n}$$

$$\therefore n = 2000$$

Rpta.: A

Resolución 8: Veamos cada exponente en el numerador

$$\frac{\log(\log x^{-1})}{\log x} = \log_x(\log x^{-1})$$

$$\frac{\log(\log y^{-1})}{\log y} = \log_y(\log y^{-1})$$

$$\frac{\log(\log z^{-1})}{\log z} = \log_z(\log z^{-1})$$

Ahora en la expresión dada se tendrá:

$$E = \frac{x^{\log_x(\log x^{-1})} + y^{\log_y(\log y^{-1})} + z^{\log_z(\log z^{-1})}}{\log(xyz)}$$

$$E = \frac{\log x^{-1} + \log y^{-1} + \log z^{-1}}{\log(xyz)}$$

$$E = \frac{\log(x^{-1} \cdot y^{-1} \cdot z^{-1})}{\log(xyz)} = \frac{\log(xyz)^{-1}}{\log(xyz)}$$

$$E = \frac{-1 \cdot \log(xyz)}{\log(xyz)}$$

$$\therefore E = -1$$

Rpta.: B

Resolución 9:

Por condición:

En la ecuación:

$$\log_4 y = 2 \Rightarrow 4^2 = 16 = y$$

$$\log_4 \left(\frac{x^2 y^3}{16} \right) = 5$$

$$4^5 = \frac{x^2 y^3}{16}$$

$$4^5 = \frac{x^2 \cdot 16^3}{16}$$

$$4^5 = \frac{x^2 \cdot 16^2}{1}$$

$$4^5 = x^2 \cdot (4^2)^2$$

$$4^5 = x^2 \cdot 4^4$$

$$4 = x^2$$

$$\therefore x = 2 \vee x = -2$$

Rpta.: B

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

Resolución 10: Transformando adecuadamente en el denominador, tenemos:

$$E = \frac{3}{\log_2 45 + \log_2 8} + \frac{2}{\log_3 40 + \log_3 9} + \frac{1}{\log_5 72 + \log_5 5}$$

$$E = \frac{3}{\log_2 (45 \cdot 8)} + \frac{2}{\log_3 (40 \cdot 9)} + \frac{1}{\log_5 (72 \cdot 5)}$$

$$E = \frac{3}{\log_2 360} + \frac{2}{\log_3 360} + \frac{1}{\log_5 360}$$

$$E = 3 \log_{360} 2 + 2 \log_{360} 3 + \log_{360} 5$$

$$E = \log_{360} (2)^3 + \log_{360} (3)^2 + \log_{360} 5$$

$$E = \log_{360} (8) + \log_{360} (9) + \log_{360} (5)$$

$$E = \log_{360} (8 \cdot 9 \cdot 5) = \log_{360} (360)$$

$$\therefore E = 1$$

Rpta.: C**Resolución 11:** La inecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} (x-5) > \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} (x-5) > \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} 4$$

En forma equivalente:

$$\begin{aligned} x-5 > 0 \wedge x-5 < 4 \\ \underbrace{x > 5 \wedge x < 9}_{5 < x < 9} \\ \therefore CS = (5; 9) \end{aligned}$$

Rpta.: B**Resolución 12:** La inecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\log_3 (7-x) > \log_3 1$$

En forma equivalente:

$$\begin{aligned} 7-x > 0 \wedge 7-x > 1 \\ -x > -7 \wedge -x > -6 \\ \underbrace{x < 7 \wedge x < 6}_{x < 6} \end{aligned}$$

$$\therefore CS = \langle -\infty; 6 \rangle$$

Rpta.: E

Resolución 13: De acuerdo con la teoría, tenemos:

$$\text{i) } \log 539 \rightarrow a = 3 - 1 = 2$$

$$\text{ii) } \log 0,0089 \rightarrow b = -3 = \bar{3}$$

Finalmente tenemos:

$$ab = (2)(-3)$$

$$\therefore ab = -6$$

Rpta.: E

Resolución 14: Por condición de existencia:

$$3x - 2 > 0 \wedge x + 1 > 0$$

$$x > \frac{2}{3} \wedge x > -1$$

$$x > \frac{2}{3} \quad \dots\dots (1)$$

De la ecuación, se cumple que:

$$3x - 2 = x + 1$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \dots\dots (2)$$

De (1) y (2) tenemos:

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore CS = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Rpta.: B

Resolución 15: La inecuación dada se puede reescribir así:

$$\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 4x) > \log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^2$$

$$\log_{\sqrt{5}}(x^2 - 4x) > \log_{\sqrt{5}} 5$$

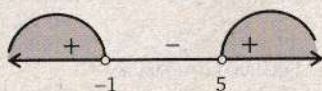
En forma equivalente:

$$x^2 - 4x > 0 \wedge x^2 - 4x > 5$$

$$x^2 - 4x > 5$$

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$(x - 5)(x + 1) > 0$$



$$\therefore CS = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 5; \infty \rangle$$

Rpta.: A

Resolución 16: De acuerdo con la definición de cologaritmo y antilogaritmo, tenemos:

$$E = -\log_{\sqrt[3]{7}} 7 + 4^{-0.5}$$

$$E = -\log_{\sqrt[3]{7}} \sqrt[3]{7^3} + 4^{-\frac{1}{2}}$$

$$E = -3 \cdot \log_{\sqrt[3]{7}} \sqrt[3]{7} + \sqrt{4}^{-1}$$

$$E = -3 \cdot 1 + 2^{-1}$$

$$E = -3 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore E = -\frac{5}{2}$$

Rpta.: D

Resolución 17: Para la progresión geométrica:

$$q = 2$$

Para la progresión aritmética es:

$$r = 1$$

Según la propiedad se cumple:

$$b = \sqrt[q]{q}$$

$$b = \sqrt[2]{2}$$

$$\therefore b = 2$$

Rpta.: C

Resolución 18: La inecuación propuesta se puede reescribir así:

$$|\log_2 x|^2 - 6|\log_2 x| - 16 \geq 0$$

$$(|\log_2 x| + 2)(|\log_2 x| - 8) \geq 0$$

Observa que $|\log_2 x| > 0 \forall x \in \mathbb{R}^+$, luego la inecuación se reduce a:

$$|\log_2 x| - 8 \geq 0$$

$$|\log_2 x| \geq 8$$

En forma equivalente: $(\log_2 x \geq 8 \vee \log_2 x \leq -8) \wedge x > 0$

$$(\log_2 x \geq \log_2 2^8 \vee \log_2 x \leq \log_2 2^{-8}) \wedge x > 0$$

$$(x \geq 2^8 \vee x \leq 2^{-8}) \wedge x > 0$$

$$0 < x \leq 2^{-8} \vee x \geq 2^8$$

$$\therefore CS = \langle 0; 2^{-8}] \cup \langle 2^8; \infty]$$

Rpta.: B

Resolución 19: Por condición de existencia, se cumple que:

$$x - 4 \geq 0 \wedge 6 - x \geq 0$$

$$x \geq 4 \wedge -x \geq -6$$

$$x \geq 4 \wedge x \leq 6$$

$$4 \leq x \leq 6$$

$$\therefore \text{Dom}(F) = [4; 6]$$

Rpta.: B

Resolución 20: Supongamos que el valor pedido es "K", luego tenemos:

$$K = \log 48 = \log (2^4 \cdot 3)$$

$$K = \log 2^4 + \log 3$$

$$K = 4 \log 2 + \log 3$$

$$\therefore K = 4a + b$$

Rpta.: B

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

Resolución 21: Sea " α " el logaritmo: $\log_{125} 25 = \alpha$
 Según la definición: $125^\alpha = 25 \Leftrightarrow 5^{3\alpha} = 5^2$
 $3\alpha = 2$
 $\therefore \alpha = \frac{2}{3}$

Rpta.: A

Resolución 22: La ecuación dada es: $\log_{\sqrt{3}}(2x+1) = 4$
 Por condición de existencia:
 $2x+1 > 0 \rightarrow x > -\frac{1}{2} \dots\dots\dots(1)$
 Según la definición tenemos:
 $\sqrt{3}^{-4} = 2x+1$
 $9 = 2x+1 \Leftrightarrow 8 = 2x$
 $4 = x \dots\dots\dots(2)$
 Intersectando (1) y (2):
 $\therefore x = 4$

Rpta.: D

Resolución 23: La ecuación dada es: $\log_2(x+2) + \text{Colog}_2(x-1) = 2$
 Por condición de existencia:
 $x+2 > 0 \wedge x-1 > 0$
 $x > -2 \wedge x > 1$
 De donde se debe cumplir: $x > 1 \dots\dots\dots(1)$
 Expresando todo en logaritmo:

$$\log_2(x+2) - \log_2(x-1) = 2$$

$$\log_2\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 2$$

Por definición de logaritmo:

$$2^2 = \frac{x+2}{x-1}$$

$$4 = \frac{x+2}{x-1}$$

$$4x - 4 = x + 2 \Rightarrow 3x = 6$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: A

Resolución 24: En cada columna tenemos:

$$A = \text{Antilog}_{25} (\text{Anti log}_4 (-0,5))$$

$$A = \text{Antilog}_{25} \left(\text{Anti log}_4 \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$A = \text{Antilog}_{25} \left(4^{-\frac{1}{2}} \right) = \text{Anti log}_{25} (\sqrt{4}^{-1})$$

$$A = \text{Antilog}_{25} (2^{-1}) = \text{Antilog}_{25} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$A = 25^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A = 5$$

$$B = \text{Colog}_3 (\text{Anti log}_3 (-5))$$

$$B = -\log_3 (3^{-5}) = (-1) \cdot (-5) \cdot \log_3 3$$

$$B = (5) \cdot (1) \Rightarrow B = 5$$

$$\therefore A = B$$

Rpta.: C

Resolución 25: La ecuación dada es:

$$(a+b)^{\log_{(ab)} x} = 64 \quad \dots\dots\dots (I)$$

Por condición tenemos:

$$a^3 b^3 = a + b$$

$$(ab)^3 = a + b \quad \dots\dots\dots (II)$$

$$\text{Reemplazando (II) en (I): } [(ab)^3]^{\log_{(ab)} x} = 64$$

$$(ab)^{3 \log_{(ab)} x} = 64$$

$$\text{Extrayendo raíz cúbica: } (ab)^{\log_{(ab)} x} = 4$$

$$\therefore x = 4$$

Rpta.: D

Resolución 26:

$$\text{Sea "}\alpha\text{" el logaritmo: } \log_{16} (\log_8 2\sqrt{2}) = \alpha \quad \dots\dots\dots (I)$$

$$\text{Con el número propuesto: } \log_8 2\sqrt{2} = \log_8 \sqrt{8} = \log_8 8^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_8 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \log_8 8 = \frac{1}{2} \cdot 1$$

De donde hemos obtenido: $\log_8 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ (II)

Reemplazando (II) en (I): $\log_{16} \left(\frac{1}{2} \right) = \alpha$

Por definición tenemos: $16^\alpha = \frac{1}{2} \leftrightarrow 2^{4\alpha} = 2^{-1}$

$$4\alpha = -1$$

$$\therefore \alpha = -\frac{1}{4}$$

Rpta.: E

Resolución 27: Por cambio de base tenemos:

$$\log_{\sqrt[5]{x+4}} (x^2 + 9x - 5) = 10$$

Por definición de logaritmos se tiene:

$$(\sqrt[5]{x+4})^{10} = x^2 + 9x - 5$$

$$(x+4)^2 = x^2 + 9x - 5$$

$$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 9x - 5$$

$$21 = x$$

Una rápida inspección en la ecuación original permite garantizar que el valor obtenido para x es correcto.

$$\therefore CS = \{21\}$$

Rpta.: C

Resolución 28: Sea la expresión dada:

$$K = \frac{\log_c a + 1}{\log_c b \cdot \log_b (ac)^2}$$

$$\text{Dando uso de propiedades: } K = \frac{\log_c a + \log_c c}{\log_c b \cdot 2 \log_b (ac)} \rightarrow K = \frac{\log_c (ac)}{2 \cdot \log_c b \cdot \log_b (ac)}$$

$$\text{Por regla de la cadena: } K = \frac{\log_c (ac)}{2 \log_c (ac)}$$

$$\therefore K = \frac{1}{2}$$

Rpta.: B

Resolución 29: Por condición de existencia:

$$x > 0 \wedge y > 0$$

De (1) por propiedad: $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log 2$

$$\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y \dots\dots\dots(I)$$

De (2) por teorema: $2^{x+y} = 2^6 \Rightarrow x+y = 6$

Reemplazando (I) en (II): $2y + y = 6 \Rightarrow 3y = 6 \dots\dots\dots(II)$
 $y = 2$

Con lo cual tenemos: $x = 4 \Rightarrow \text{Sol} = (4; 2)$

$$\therefore \text{CS} = \{(4; 2)\}$$

Rpta.: A

Resolución 30: Sea la expresión dada: $K = \text{Colog}_6 \text{ Antilog}_3 (\log_3 12 + 1)$

Por definición de Antilog: $K = \text{Colog}_6 (3^{\log_3 12 + 1})$

$$K = \text{Colog}_6 (3^{\log_3 12} \cdot 3^1)$$

Por teorema tenemos: $K = \text{Colog}_6 (12 \cdot 3)$

$$K = \text{Colog}_6 (36)$$

Por definición de Colog: $K = -\log_6 (36) = -\log_6 (6^2)$

$$K = -2 \cdot \log_6 6 = -2 \cdot 1$$

$$\therefore K = -2$$

Rpta.: C

Resolución 31: Sea la expresión:

$$K = \frac{(e^x + e^y + e^z) \cdot (x+y+z)}{e^{\ln(z-y)} + e^{\ln(z-x)} + e^{\ln(x+y)}}$$

Por teorema: $K = \frac{(e^x + e^y + e^z) \cdot (x+y+z)}{(z-y) + (z-x) + (x+y)}$

$$K = \frac{(e^x + e^y + e^z) \cdot (x+y+z)}{2z} \dots\dots\dots(I)$$

Por dato tenemos: $\ln 3 = x \quad ; \quad \ln 5 = y \quad ; \quad \ln 15 = z$

Ahora por definición: $e^x = 3 \quad ; \quad e^y = 5 \quad ; \quad e^z = 15 \dots\dots\dots(II)$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

También podemos notar que:

$$x + y + z = \ln 3 + \ln 5 + \ln 15$$

Por propiedad operativa:

$$x + y + z = \ln(3 \cdot 5 \cdot 15)$$

$$x + y + z = \ln(15)^2$$

$$x + y + z = 2 \cdot \ln 15$$

Como: $\ln 15 = z$, tenemos:

$$x + y + z = 2z \quad \dots\dots\dots(\text{III})$$

Reemplazando (II) y (III) en (I):

$$K = \frac{(3 + 5 + 15) \cdot (2z)}{2z}$$

$$\therefore K = 23$$

Rpta.: C

Resolución 32:

Sea el valor solicitado:

$$K = \log \sqrt[4]{781,25} = \log \sqrt[4]{\frac{78125}{100}}$$

$$K = \log \left(\frac{78125}{100} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \log \left(\frac{78125}{100} \right)$$

Por propiedad operativa: $K = \frac{1}{4} (\log 78125 - \log 100)$

$$K = \frac{1}{4} (\log 5^7 - \log 10^2)$$

$$K = \frac{1}{4} (7 \log 5 - 2 \log 10)$$

Como: $5 = \frac{10}{2}$, tenemos: $K = \frac{1}{4} \left[7 \cdot \log \left(\frac{10}{2} \right) - 2 \cdot 1 \right]$

Por propiedad operativa: $K = \frac{1}{4} [7 \cdot (\log 10 - \log 2) - 2]$

$$K = \frac{1}{4} [7 \cdot (1 - \log 2) - 2]$$

Reemplazando el dato: $K = \frac{1}{4} [5 - 7 \cdot \log 2]$

$$K = \frac{1}{4} [5 - 7 \cdot (0,30103)]$$

$$K = \frac{1}{4} (2,89279)$$

$$\therefore K = 0,7231975$$

Rpta.: A

Resolución 33: La inecuación dada es: $\log_2(x-4) < 1$
 Observar que: $1 = \log_2 2$, luego:
 $\log_2(x-4) < \log_2 2$
 Ahora debemos plantear: $x-4 > 0 \wedge x-4 < 2$
 $x > 4 \wedge x < 6$
 De donde obtenemos: $4 < x < 6$
 $\therefore CS = \langle 4; 6 \rangle$

Rpta.: D

Resolución 34: Sea la expresión dada: $K = \left[(\log_3 \sqrt[2]{2})^2 \cdot (\log_2 \sqrt[3]{3})^2 \right]^{\log_6 5}$
 $K = \left[\log_3 \sqrt[2]{2} \cdot \log_2 \sqrt[3]{3} \right]^{2 \log_6 5}$
 $K = \left[2^{\log_3 2} \cdot 3^{\log_2 3} \right]^{2 \log_6 5}$
 Aplicando propiedades: $K = \left[2^{\log_2 3} \cdot 3^{\log_3 2} \right]^{\log_6 5^2}$
 Por teorema se tiene: $K = [3 \cdot 2]^{\log_6 25} = 6^{\log_6 25}$
 $\therefore K = 25$

Rpta.: C

Resolución 35: Sea la expresión dada: $K = \frac{1 + \log_5 7}{1 - \log_5 7} + \frac{1 + \log_7 5}{1 - \log_7 5}$
 Expresando todo en base 5: $K = \frac{1 + \log_5 7}{1 - \log_5 7} + \frac{1 + \frac{1}{\log_5 7}}{1 - \frac{1}{\log_5 7}}$
 $K = \frac{1 + \log_5 7}{1 - \log_5 7} + \frac{\log_5 7 + 1}{\log_5 7 - 1}$
 Transformando convenientemente:
 $K = \frac{1 + \log_5 7}{1 - \log_5 7} + \frac{1 + \log_5 7}{-(1 - \log_5 7)}$
 $K = \frac{1 + \log_5 7}{1 - \log_5 7} - \frac{1 + \log_5 7}{1 - \log_5 7}$
 $\therefore K = 0$

Rpta.: C

Resolución 36: Sea la expresión: $E = \log_{16} \log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \log_{\sqrt{8}} \log_{\sqrt{2}} 2 \dots\dots\dots (I)$

Podemos observar que: $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2 = 2 \cdot \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 2$

Ahora en (I) tenemos: $E = \log_{16} \log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \log_{\sqrt{8}} 2 \dots\dots\dots (II)$

Podemos observar que: $\log_{\sqrt{8}} 2 = \log_{\sqrt{8}} \sqrt[3]{8} = \log_8 \sqrt[3]{8}^2$
 $\log_{\sqrt{8}} 2 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_8 8 = \frac{2}{3}$

Ahora en (II) tenemos: $E = \log_{16} \log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \left(\frac{2}{3}\right) \dots\dots\dots (III)$

Podemos observar que: $\log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \left(\frac{2}{3}\right) = \log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \sqrt{\frac{4}{9}} = \log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$
 $\log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \log_{\left(\frac{4}{9}\right)} \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2}$

Ahora en (III) tenemos: $E = \log_{16} \left(\frac{1}{2}\right) = \log_{16} (2^{-1})$

$$E = \log_{\sqrt[4]{16}} \sqrt[4]{2^{-1}} = \log_2 2^{-\frac{1}{4}}$$

$$E = -\frac{1}{4} \cdot \log_2 2 = -\frac{1}{4} \cdot 1$$

$$\therefore E = -\frac{1}{4}$$

Rpta.: D

Resolución 37: Se pide calcular: $K = \text{Antilog} \left[\frac{1}{2} (2 \log a + \log b - 3 \log c) \right]$

$$K = \text{Antilog} \left[\log a + \frac{1}{2} \log b - \frac{3}{2} \log c \right]$$

Por propiedades: $K = \text{Antilog} \left[\log a + \log \sqrt{b} - \log \sqrt{c^3} \right]$

$$K = \text{Antilog} \left[\log \left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{c^3}} \right) \right]$$

Relación entre operadores:

$$K = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{c}^3} = \frac{a\sqrt{b}}{c\sqrt{c}}$$

$$\therefore K = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b}{c}}$$

Rpta.: A

Resolución 38:

Por condición tenemos: $\log_a \sqrt[5]{[a(2-\sqrt{3})^2]^2} = \frac{1}{2}$

Por definición de logaritmo: $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[5]{[a(2-\sqrt{3})^2]^2}$

Elevando al exponente 5: $a^{\frac{5}{2}} = [a(2-\sqrt{3})^2]^2$

Extrayendo raíz cuadrada: $a^{\frac{5}{4}} = a(2-\sqrt{3})^2$

$$a^{\frac{5}{4}-1} = (2-\sqrt{3})^2$$

$$a^{\frac{1}{4}} = (2-\sqrt{3})^2$$

Extrayendo raíz cuadrada: $a^{\frac{1}{8}} = 2-\sqrt{3}$ (I)

Sea "x" el valor solicitado: $\log_a \sqrt{[a(2+\sqrt{3})]^5} = x$

Por definición de logaritmo: $a^x = \sqrt{[a(2+\sqrt{3})]^5}$

Elevando al cuadrado tenemos: $a^{2x} = [a(2+\sqrt{3})]^5$

Extrayendo raíz quinta: $a^{\frac{2x}{5}} = a(2+\sqrt{3}) \Rightarrow a^{\frac{2x}{5}-1} = 2+\sqrt{3}$ (II)

Multiplicando (I) y (II): $a^{\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{2x}{5}-1} = (2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})$

$$a^{\frac{1}{8} + \frac{2x}{5} - 1} = 4-3 \Rightarrow a^{\frac{1}{8} + \frac{2x}{5} - 1} = 1$$

Por definición tenemos: $\frac{1}{8} + \frac{2x}{5} - 1 = 0$

$$\frac{2x}{5} = 1 - \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{35}{16}$$

Rpta.: A

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

Resolución 39: Teniendo en cuenta a la condición de existencia de los logaritmos en $\mathbb{R}$, la ecuación dada se puede reescribir así:

$$\frac{1}{\log_{\left(x+\frac{1}{x}\right)}(2x)} = \frac{1}{\log_{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\log_{\left(x+\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{1}{x}\right) = \log_{\left(x+\frac{1}{x}\right)}(2x)$$

De donde se plantea: $\frac{1}{x} = 2x \leftrightarrow \frac{1}{x} = x^2$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Rpta.: C

Resolución 40: Por condición de existencia: $x + 14 > 0 \wedge x + 7 > 0$

$$x > -14 \wedge x > -7$$

De donde al intersectar: $x > -7$ (1)

La ecuación dada es: $\log \sqrt{x+14} + \log \sqrt{x+7} = \log 1,2 + 1$

Como: $1 = \log 10$, tenemos: $\log \sqrt{x+14} + \log \sqrt{x+7} = \log 1,2 + \log 10$

Por propiedad operativa: $\log [\sqrt{(x+14)(x+7)}] = \log 12$

$$\sqrt{(x+14)(x+7)} = 12$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$x^2 + 21x + 98 = 44$$

$$x^2 + 21x - 46 = 0$$

$$(x+23) \cdot (x-2) = 0$$

De donde al igualar a cero: $x = -23 \vee x = 2$ (2)

Finalmente de (1) y (2): $x = 2$

$$\therefore CS = \{2\}$$

Rpta.: D

Resolución 41: La ecuación dada es: $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

Como: $2 = \log_2 4$, luego: $\log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2 4 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

Por propiedad operativa $\log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2[4(3^{x-1} + 1)]$

$$9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1} + 1)$$

$$9^{x-1} + 7 = 4 \cdot 3^{x-1} + 4$$

En el primer miembro se tendrá:

$$(3^{x-1})^2 - 4(3^{x-1}) + 3 = 0$$

$$(3^{x-1} - 3)(3^{x-1} - 1) = 0$$

$$3^{x-1} - 3 = 0 \vee 3^{x-1} - 1 = 0$$

$$3^{x-1} = 3 \vee 3^{x-1} = 1$$

Por teorema y definición tenemos:

$$x - 1 = 1 \vee x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 2 \vee x = 1$$

Rpta.: E

Resolución 42: La ecuación dada es: $\log(2x - 1)^n + \log(x - 1)^{10 \log n} = n$

Por teorema tenemos: $\log(2x - 1)^n + \log(x - 1)^n = n$

Por propiedad operativa: $n \cdot \log(2x - 1) + n \cdot \log(x - 1) = n$

Simplificando tenemos: $\log(2x - 1) + \log(x - 1) = 1$

Por condición de existencia: $2x - 1 > 0 \wedge x - 1 > 0$

$$x > \frac{1}{2} \wedge x > 1$$

De donde al intersectar: $x > 1 \dots\dots\dots(1)$

Por propiedad operativa: $\log[(2x - 1)(x - 1)] = 1$

Por definición de logaritmo: $(2x - 1)(x - 1) = 10$

$$2x^2 - 3x + 1 = 10$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 3) = 0$$

De donde igualando a cero: $x = -\frac{3}{2} \vee x = 3 \dots\dots\dots(2)$

Finalmente de (1) y (2): $x = 3$
 $\therefore CS = \{3\}$

Rpta.: D

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

Resolución 43: La ecuación dada es: $\log_2 x + \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x^2 = \frac{15}{2}$

Por existencia: $x > 0$: $\log_2 x + \log_{\sqrt[4]{16}} \sqrt[4]{x} + \log_{\sqrt{4}} \sqrt{x} + \log_2 x^2 = \frac{15}{2}$

Propiedad operativa: $\log_2 x + \log_2 x^{\frac{1}{4}} + \log_2 x^{\frac{1}{2}} + \log_2 x^2 = \frac{15}{2}$

$$\log_2 x + \frac{1}{4} \cdot \log_2 x + \frac{1}{2} \cdot \log_2 x + 2 \cdot \log_2 x = \frac{15}{2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2\right) \cdot \log_2 x = \frac{15}{2}$$

$$\frac{15}{4} \cdot \log_2 x = \frac{15}{2}$$

$$\log_2 x = 2$$

Finalmente por definición: $x = 4$

Rpta.: B

Resolución 44: De la primera condición: $\log_a 3 = \log_b 2$

Por definición de logaritmo: $a^{\log_b 2} = 3$ (1)

De la segunda condición: $a = \frac{10}{b}$ (2)

Reemplazando (2) en (1) tenemos: $\left(\frac{10}{b}\right)^{\log_b 2} = 3$

Tomando logaritmo decimal: $\log \left(\frac{10}{b}\right)^{\log_b 2} = \log 3$

Por propiedad operativa: $\log_b 2 \cdot \log \left(\frac{10}{b}\right) = \log 3$

$$\log \left(\frac{10}{b}\right) \log_b 2 = \log 3$$

$$(\log 10 - \log b) \cdot \log_b 2 = \log 3$$

$$(1 - \log b) \cdot \log_b 2 = \log 3$$

Efectuando operaciones: $\log_b 2 - \log b \cdot \log_b 2 = \log 3$

Por regla de la cadena: $\log_b 2 - \log 2 = \log 3$

$$\log_b 2 = \log 3 + \log 2$$

Por definición de logaritmos: $\log_b 2 = \log 6$

$$b^{\log 6} = 2$$

$$\therefore b = {}^{\log 6} \sqrt{2}$$

Rpta.: D

Resolución 45: Observar que $x > 0$, luego:
$$\frac{10^{2\log x} + 1}{10^{\log_{100} x^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Por propiedades operativas:
$$\frac{10^{\log x^2} + 1}{10^{\log x}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Por teorema tenemos:
$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = 4x$$

Por aspa simple conseguimos:

$$\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0$$

$$(\sqrt{3}x - 1)(x - \sqrt{3}) = 0$$

De donde al igualar a cero: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x_2 = \sqrt{3}$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = 1$$

Rpta.: A

Resolución 46: Observar que $x > 0$, luego:
$$\sqrt{x}^{\log \sqrt{x}} = 10$$

Tomando logaritmo decimal: $\log \sqrt{x}^{\log \sqrt{x}} = \log 10$

$$\log \sqrt{x} \cdot \log \sqrt{x} = 1$$

$$(\log \sqrt{x})^2 = 1$$

De donde podemos notar que:

$$\log \sqrt{x} = 1 \quad \vee \quad \log \sqrt{x} = -1$$

Por definición de logaritmo:

$$\sqrt{x} = 10 \quad \vee \quad \sqrt{x} = \frac{1}{10}$$

$$x = 100 \quad \vee \quad x = \frac{1}{100}$$

$$\therefore CS = \left\{ 100; \frac{1}{100} \right\}$$

Rpta.: A

Resolución 47:Observar que $x > 0$:

$$x^{\log x} = \frac{10^{12}}{x^4}$$

Tomando logaritmo decimal:

$$\log x^{\log x} = \log \left(\frac{10^{12}}{x^4} \right)$$

Por propiedades operativas:

$$\log x \cdot \log x = \log 10^{12} - \log x^4$$

$$(\log x)^2 = 12 - \log 10 - 4 \cdot \log x$$

$$(\log x)^2 = 12 - 4(\log x)$$

En el primer miembro: $(\log x)^2 + 4(\log x) - 12 = 0$

$$(\log x + 6) \cdot (\log x - 2) = 0$$

Igualando a cero tenemos: $\log x = -6 \vee \log x = 2$

$$x = 10^{-6} \vee x = 10^2$$

$$\therefore CS = \{10^{-6}; 10^2\}$$

Rpta.: D**Resolución 48:**Observar que $x > 0$, luego:

$$(\log_x ax^2) \cdot (\log_a a^2 x) = \log_{(a^{-1})} (a^{-10})$$

Por propiedades operativas:

$$(\log_x a + \log_x x^2) \cdot (\log_a a^2 + \log_a x) = \log_a a^{10}$$

$$(\log_x a + 2) \cdot (2 + \log_a x) = 10$$

En función de la base "a":

$$\left(\frac{1}{\log_a x} + 2 \right) \cdot (2 + \log_a x) = 10$$

$$\left(\frac{1 + 2\log_a x}{\log_a x} \right) \cdot (2 + \log_a x) = 10$$

Efectuando operaciones:

$$2(\log_a x)^2 + 5\log_a x + 2 = 10\log_a x$$

$$2(\log_a x)^2 - 5(\log_a x) + 2 = 0$$

$$(2\log_a x - 1)(\log_a x - 2) = 0$$

Igualando a cero tenemos:

$$\log_a x = \frac{1}{2} \vee \log_a x = 2$$

$$x = \sqrt{a} \vee x = a^2$$

$$\therefore CS = \{\sqrt{a}; a^2\}$$

Rpta.: B

Resolución 49: La ecuación dada es: $\log_a \log_{a^a} x + \log_{a^a} x \cdot \log_a x = a$

Observar que $x > 0$, luego: $\log_a \log_{a^a} x + \log_{a^a} x \cdot \log_{(a^a)} (x^a) = a$

$$\log_a \log_{a^a} x + \log_{a^a} x \cdot a \cdot \log_{a^a} x = a$$

$$\log_a \log_{a^a} x + a \cdot (\log_{a^a} x)^2 = a$$

Hagamos $\log_{a^a} x = m$: $\log_a m + am^2 = a$; $m > 0$ (1)

$$\log_a m = a - am^2$$

Por definición tenemos: $a^{a-am^2} = m \iff a^a = m \cdot a^{am^2}$

Elevando al cuadrado: $(a^a)^2 = (m \cdot a^{am^2})^2 \rightarrow a^{2a} = m^2 a^{2am^2}$

Dando forma parecida: $(1) \cdot (a^{2a})^{(1)} = (m^2) \cdot (a^{2a})^{(m^2)}$

Por comparación tenemos: $m^2 = 1$

Como $m > 0$ según (1): $m = 1$

Finalmente hemos conseguido $\log_{a^a} x = 1$

$$\therefore x = a^a$$

Rpta.: B

Resolución 50: Por existencia se debe cumplir:

$$x > 0 \wedge y > 0$$

Por propiedad operativa en (2):

$$\log(xy) = 2$$

Por definición de logaritmo se tiene:

$$xy = 100 \text{(3)}$$

Por ser $x > 0 \wedge y > 0$, además $x > y$:

$$x = 20 \wedge y = 5$$

Finalmente hallemos lo pedido:

$$K = \log_{2\sqrt{y}} \sqrt{x}$$

Reemplazando valores tenemos:

$$K = \log_{2\sqrt{5}} \sqrt{20}$$

$$K = \log_{\sqrt{20}} \sqrt{20}$$

$$\therefore K = 1$$

Rpta.: A

Resolución 51: Expresando los logaritmos en función de la base diez, tenemos:

$$E = \frac{\log 2}{\log 5} \cdot \log 2 + \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \log 5 - \frac{1}{\log 5} \cdot \frac{1}{\log 2}$$

$$E = \frac{(\log 2)^2}{\log 5} + \frac{(\log 5)^2}{\log 2} - \frac{1}{\log 5 \cdot \log 2}$$

$$E = \frac{(\log 2)^3 + (\log 5)^3 - 1}{\log 5 \cdot \log 2}$$

$$E = \frac{(\log 2)^3 + (\log 5)^3 + (-1)^3}{\log 5 \cdot \log 2}$$

Observa que $\log 2 + \log 5 + (-1) = 0$, luego la expresión se puede reescribir así:

$$E = \frac{3(\log 2)(\log 5)(-1)}{\log 5 \cdot \log 2}$$

$$E = \frac{-3 \log 2 \cdot \log 5}{\log 5 \cdot \log 2}$$

$$\therefore E = -3$$

Rpta.: A

Resolución 52: De las condiciones tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \log_3 x^2 = a &\Rightarrow x^2 = 3^a \\ \log_3 y^2 = b &\Rightarrow y^2 = 3^b \end{aligned} \right\} \frac{x^2}{y^2} = \frac{3^a}{3^b}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 3^{a-b}$$

A continuación de acuerdo con las propiedades expuestas para los logaritmos procedemos a transformar la expresión propuesta:

$$E = 20 \log_9 \sqrt[10]{\frac{x}{y}}$$

$$E = \log_9 \left(\sqrt[10]{\frac{x}{y}} \right)^{20}$$

$$E = \log_9 \left(\frac{x}{y} \right)^2$$

$$E = \log_9 (3^{a-b})$$

$$E = \log_{\sqrt{9}} \sqrt{3^{a-b}}$$

$$E = \log_3 3^{\frac{a-b}{2}}$$

$$E = \frac{a-b}{2} \cdot \log_3 3$$

$$E = \frac{a-b}{2} \cdot 1$$

$$\therefore E = \frac{a-b}{2}$$

Rpta.: D

Resolución 53: La expresión solicitada es:

$$E = \log_3(2,7) = \log_3\left(\frac{27}{10}\right)$$

$$E = \log_3(27) - \log_3(10)$$

$$E = \log_3 3^3 - \log_3(5 \cdot 2)$$

$$E = 3 \cdot \log_3 3 - (\log_3 5 + \log_3 2)$$

$$E = 3 \cdot 1 - (a + b)$$

$$\therefore E = 3 - a - b$$

Rpta.: D

Resolución 54: La expresión propuesta se puede reescribir así:

$$E = \log\left(\frac{2}{5}\right)^3 \sqrt{\frac{50}{125}} + \log\left(\frac{8}{25}\right) \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$E = \log\left(\frac{2}{5}\right)^3 \sqrt{\frac{2}{5}} + \log\left(\frac{8}{25}\right) \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{5}}$$

$$E = \log\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} + \log\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E = \frac{1}{3} \cdot \log\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$$

$$E = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \rightarrow E = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore E = \frac{5}{6}$$

Rpta.: B

Resolución 55: Transformando convenientemente la ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\log(2x+2)^2 - \log 100 = \log\left(\frac{25+12x}{25}\right)$$

$$\log\left[\frac{(2x+2)^2}{100}\right] = \log\left(\frac{25+12x}{25}\right)$$

$$\frac{(2x+2)^2}{100} = \frac{25+12x}{25}$$

$$\frac{4x^2+8x+4}{20} = \frac{25+12x}{5}$$

$$\frac{2x^2+4x+2}{10} = \frac{25+12x}{5}$$

$$x^2+2x+1=25+12x$$

$$x^2-10x-24=0$$

$$(x-12)(x+2)=0$$

$$x=12 \vee x=-2$$

Una rápida inspección permite reconocer que el único valor que verifica la ecuación es $x=12$

$$\therefore CS = \{12\}$$

Rpta.: C

Resolución 56: Con la segunda ecuación: $x^{\log y} = 10^7 \Rightarrow \log x^{\log y} = \log 10^7$
 $\log x \cdot \log y = 7 \dots\dots (3)$

De (1) y (3) reconocemos que:

$$(\log x = 7 \wedge \log y = 1) \vee (\log x = 1 \wedge \log y = 7)$$

$$(10^7 = x \wedge 10 = y) \vee (x = 10 \wedge y = 10^7)$$

Finalmente tenemos:

$$\frac{x}{y} = 10^6 \vee \frac{x}{y} = 10^{-6}$$

$$\therefore \text{Mayor valor de } \frac{x}{y} = 10^6$$

Rpta.: C

Resolución 57: Con cada uno de los datos tenemos:

$$\begin{aligned} 10^x &= 18 \Rightarrow \log 10^x = \log 18 \\ x \cdot \log 10 &= \log (6 \cdot 3) \\ x &= \log 6 + \log 3 \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^y &= 12 \Rightarrow \log 10^y = \log 12 \\ y \cdot \log 10 &= \log (6 \cdot 2) \\ y &= \log 6 + \log 2 \dots (2) \end{aligned}$$

Efectuando (1) + (2):

$$\begin{aligned} x + y &= \log 6 + \log 6 + \log 3 + \log 2 \\ x + y &= 2 \log 6 + \log 6 \\ x + y &= 3 \log 6 \end{aligned}$$

$$\therefore \log 6 = \frac{x+y}{3}$$

Rpta.: C

Resolución 58: La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$x \log 3 = 4 \log (\log 125) - 4 \log (\log 5)$$

$$x \log 3 = 4 [\log (\log 125) - \log (\log 5)]$$

$$x \log 3 = 4 \left[\log \left(\frac{\log 125}{\log 5} \right) \right]$$

$$x \log 3 = 4 \left[\log \left(\frac{\log 5^3}{\log 5} \right) \right]$$

$$x \log 3 = 4 \left[\log \left(\frac{3 \log 5}{\log 5} \right) \right]$$

$$x \log 3 = 4 \log (3)$$

$$\therefore x = 4$$

Rpta.: A

Resolución 59: La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\log (\log (\log x)) = \log_x (\log_3 3)$$

$$\log (\log (\log x)) = \log_x 1$$

$$\log (\log (\log x)) = 0$$

$$10^0 = \log (\log x)$$

$$1 = \log (\log x)$$

$$\log x = 10^1$$

$$\log x = 10$$

$$x = 10^{10}$$

$$\therefore \sqrt[10]{x} = 10$$

Rpta.: B

Resolución 60: La ecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\log \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) = \log(ab)$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} = ab$$

$$a^2 + b^2 = 2ab$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 0$$

$$(a - b)^2 = 0$$

$$a - b = 0$$

$$a = b$$

Finalmente en la expresión pedida:

$$E = \log_b b + \log_a a + 20$$

$$E = 1 + 1 + 20$$

$$\therefore E = 22$$

Rpta.: A

Resolución 61: La expresión propuesta, según las propiedades de los logaritmos, se puede reescribir así:

$$E = \sqrt[3]{5^{\log_5 10} + \frac{17}{\sqrt{-\log(10)^{-1}}}}$$

$$E = \sqrt[3]{10 + \frac{17}{\sqrt{(-1) \cdot (-1) \cdot \log(10)}}}$$

$$E = \sqrt[3]{10 + \frac{17}{\sqrt{1}}} = \sqrt[3]{10 + \frac{17}{1}}$$

$$E = \sqrt[3]{10 + 17} = \sqrt[3]{27}$$

$$\therefore E = 3$$

Rpta.: E

Resolución 62: I. De la condición:

$$x = 8^{\log_{27} x^a} \Rightarrow \log_2 x = \log_2 8^{\log_{27} x^a}$$

$$\log_2 x = \log_{27} x^a \cdot \log_2 8$$

$$\log_2 x = a \cdot \log_{27} x \cdot \log_2 2^3$$

$$\log_2 x = a \cdot \log_{\sqrt[3]{27}} \sqrt[3]{x} \cdot 3 \cdot \log_2 2$$

$$\log_2 x = a \cdot \log_3 x^{\frac{1}{3}} \cdot 3 \cdot 1$$

$$\log_2 x = a \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_3 x \cdot 3$$

$$\log_2 x = a \log_3 x$$

$$\frac{1}{\log_x 2} = a \cdot \frac{1}{\log_x 3}$$

$$\frac{\log_x 3}{\log_x 2} = a$$

$$\log_2 3 = a$$

$$2^a = 3$$

II. En la expresión pedida:

$$E = \log_{12} 2 = \frac{\log 2}{\log 12}$$

$$E = \frac{\log 2}{\log(2^2 \cdot 3)} = \frac{\log 2}{\log 2^2 + \log 3}$$

$$E = \frac{\log 2}{2 \log 2 + \log 3} = \frac{\log 2}{2 \log 2 + \log 2^a}$$

$$E = \frac{\log 2}{2 \log 2 + a \log 2} = \frac{\log 2}{(2 + a) \cdot \log 2}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2 + a}$$

Rpta.: C**Resolución 63:** Suponiendo que "K" es equivalente de la expresión dada, podemos reescribir así:

$$K = \sqrt{\frac{1}{\log_2 15 + \log_2 2} + \frac{1}{\log_3 10 + \log_3 3} + \frac{1}{\log_5 6 + \log_5 5}}$$

$$K = \sqrt{\frac{1}{\log_2 30} + \frac{1}{\log_3 30} + \frac{1}{\log_5 30}}$$

$$K = \sqrt{\log_{30} 2 + \log_{30} 3 + \log_{30} 5}$$

$$K = \sqrt{\log_{30} (2 \cdot 3 \cdot 5)}$$

$$K = \sqrt{\log_{30} (30)}$$

$$K = \sqrt{1}$$

$$\therefore K = 1$$

Rpta.: E

Resolución 64: De las condiciones tenemos:

$$a = x^{\log y} \Rightarrow \log a = \log x^{\log y}$$

$$\log a = \log y \cdot \log x$$

$$b = y^{\log x} \Rightarrow \log b = \log y^{\log x}$$

$$\log b = \log x \cdot \log y$$

Fácilmente podemos reconocer que $a=b$, asimismo:

$$\log a + \log b = \log(ab) = 2 \log a$$

En la expresión pedida:

$$E = \frac{\log\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\log(ab)} = \frac{\log\left(\frac{2a}{2}\right)}{\log(ab)}$$

$$E = \frac{\log(a)}{\log(a) + \log(b)} = \frac{\log(a)}{2\log(a)}$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}$$

Rpta.: C

Resolución 65: En la condición:

Según la fórmula:

$$F(\log_5 x; \log_5 x) = -4$$

$$2 \log_5 x - 6 \log_5 x = -4$$

$$-4 \log_5 x = -4$$

$$\log_5 x = 1$$

$$x = 5$$

$$\therefore x^2 = 25$$

Rpta.: D

Resolución 66: La expresión propuesta se puede reescribir así:

$$E = \text{Co log}_4^{-1} \log_2 \log_2^2 \text{anti log}_4 [\log_{1,4}(1,4)^2]$$

$$E = \text{Co log}_4^{-1} \log_2 \log_2^2 \text{anti log}_4 [2]$$

$$E = \text{Co log}_4^{-1} \log_2 \log_2^2 (4^2)$$

$$E = \text{Co log}_4^{-1} \log_2 [\log_2 16]^2$$

$$E = \text{Co log}_4^{-1} \log_2 [\log_2 2^4]^2$$

$$E = \text{Co log}_4^{-1} \log_2 [4]^2$$

$$E = \text{Co log}_4^{-1} \log_2 (16)$$

$$E = \text{Co log}_4^{-1} \log_2 (2^4)$$

$$E = \text{Co log}_4^{-1} (4) = (\text{Co log}_4 4)^{-1}$$

$$E = (-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)}$$

$$\therefore E = -1$$

Rpta.: D

Resolución 67: La inecuación propuesta se puede reescribir así:

$$\ln(e^2 - 1 + e^{2-x}) \geq \ln e^x$$

$$e^2 - 1 + e^{2-x} \geq e^x$$

Multiplicando por e^x tenemos:

$$(e^2 - 1)e^x + e^2 \geq e^{2x}$$

$$e^{2x} - (e^2 - 1)e^x - e^2 \leq 0$$

$$(e^x + 1)(e^x - e^2) \leq 0$$

Como $e^x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, la inecuación se reduce a:

$$e^x - e^2 \leq 0$$

$$e^x \leq e^2$$

$$x \leq 2$$

Como $x \in \mathbb{Z}^+$:

$$x = 1 \text{ ó } x = 2$$

$\therefore$ Número de valores = 2

Rpta.: A

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

Resolución 68:

De la condición:

$$\log_3 a = \frac{1}{2} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = a$$

$$\sqrt{3} = a$$

En la ecuación:

$$\log_3 \left(\frac{\sqrt{ab}}{9} \right) = -\frac{3}{2}$$

$$3^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{ab}}{9}$$

$$9 \cdot \sqrt{3}^{-3} = \sqrt{ab}$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } 81 \cdot \frac{1}{27} = ab$$

$$3 = ab$$

$$ab = 3$$

$$\sqrt{3}b = \sqrt{3}^2$$

$$\therefore b = \sqrt{3}$$

Rpta.: E**Resolución 69:**

I. Por condición de existencia:

$$\frac{3x+10}{x+7} > 0$$

$$\text{En forma equivalente: } x < -7 \vee x > -\frac{10}{3}$$

II. De la inecuación tenemos:

$$\log_6 1 < \log_6 \left(\frac{3x+10}{x+7} \right) < \log_6 2$$

$$1 < \frac{3x+10}{x+7} < 2$$

$$1-3 < \frac{3x+10}{x+7} - 3 < 2-3$$

$$-2 < \frac{-11}{x+7} < -1$$

$$-1 < -\frac{x+7}{11} < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{x+7}{11} < 1$$

$$\frac{11}{2} < x+7 < 11$$

$$\frac{11}{2} - 7 < x < 11 - 7$$

$$-\frac{3}{2} < x < 4$$

Intersectando los resultados obtenidos en (I) y (II) tenemos:

$$-\frac{3}{2} < x < 4$$

$$\therefore CS = \left(-\frac{3}{2}; 4\right)$$

Rpta.: A

Resolución 70: De acuerdo con la ecuación dada procedemos de la manera siguiente:

$$\log_5 \left(\log_4 \left(\log_3 \left(\log_2 |2x - x^2| \right) \right) \right) = 1$$

$$\log_4 \left(\log_3 \left(\log_2 |2x - x^2| \right) \right) = 5$$

$$\log_3 \left(\log_2 |2x - x^2| \right) = 4^5$$

$$\log_3 \left(\log_2 |2x - x^2| \right) = 1024$$

$$\log_2 |2x - x^2| = 3^{1024}$$

$$|2x - x^2| = 2^{3^{1024}}$$

Eliminando el valor absoluto:

$$2x - x^2 = 2^{3^{1024}} \vee 2x - x^2 = -2^{3^{1024}}$$

$$\underbrace{x^2 - 2x + 2^{3^{1024}} = 0}_{\Delta < 0} \vee \underbrace{x^2 - 2x - 2^{3^{1024}} = 0}_{\Delta > 0}$$

Fácilmente reconocemos que las soluciones reales se encuentran en la ecuación:

$$x^2 - 2x - 2^{3^{1024}} = 0$$

$$\therefore \sum \text{desoluciones} = 2$$

Rpta.: B

Resolución 71: Sea "S" el equivalente de la expresión, luego tenemos:

$$S = \sum_{k=2}^{66} \left(\frac{1}{\log_k 66!} \right) = \sum_{k=2}^{66} (\log_{66!} k)$$

Expandiendo la sumatoria tenemos:

$$S = \log_{66!} 2 + \log_{66!} 3 + \log_{66!} 4 + \dots + \log_{66!} 66$$

$$S = \log_{66!} (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 66) = \log_{66!} (66!)$$

$$\therefore S = 1$$

Rpta.: B

Resolución 72: Supongamos que "K" es el equivalente solicitado, luego::

$$K = \sqrt[4]{\frac{(\log a^3)^3 + (\log b^3)^3 + (\log c^3)^3}{\log a \log c \log b}}$$

$$K = \sqrt[4]{\frac{(3 \log a)^3 + (3 \log b)^3 + (3 \log c)^3}{\log c \log b \log a}}$$

$$K = \sqrt[4]{\frac{27(\log a)^3 + 27(\log b)^3 + 27(\log c)^3}{\log c \log b \log a}}$$

$$K = \sqrt[4]{\frac{27[(\log a)^3 + (\log b)^3 + (\log c)^3]}{(\log a)(\log b)(\log c)}}$$

Por condición tenemos:

$$abc = 1$$

$$\log(abc) = \log(1)$$

$$\log a + \log b + \log c = 0$$

Por equivalencia condicional:

$$(\log a)^3 + (\log b)^3 + (\log c)^3 = 3(\log a)(\log b)(\log c)$$

Finalmente en la expresión "K" se tendrá:

$$K = \sqrt[4]{\frac{27[(\log a)^3 + (\log b)^3 + (\log c)^3]}{(\log a)(\log b)(\log c)}}$$

$$K = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81}$$

$$\therefore K = 3$$

Rpta.: B

Resolución 73: Por condición tenemos: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b-a} = \frac{2}{b}$

$$\frac{b-a+a+b}{(a+b)(b-a)} = \frac{2}{b}$$

$$\frac{2b}{b^2-a^2} = \frac{2}{b}$$

$$b^2 = b^2 - a^2$$

$$a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$$

Ahora en la expresión solicitada tenemos:

$$E = \frac{\log\left(\frac{b}{2b}\right) + \log\left(\frac{2b}{4b}\right) + \log\left(\frac{4b}{8b}\right)}{\log\left(\frac{3b}{6b}\right)}$$

$$E = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$E = \frac{3\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore E = 3$$

Rpta.: C

Resolución 74: Sea "K" el equivalente, luego tenemos:

$$K = \log_{51} 6! = \log_{120} 720$$

$$K = \frac{\log 720}{\log 120} = \frac{\log(3^2 \cdot 2^3 \cdot 10)}{\log(3 \cdot 2^2 \cdot 10)}$$

$$K = \frac{\log 3^2 + \log 2^3 + \log 10}{\log 3 + \log 2^2 + \log 10} = \frac{2\log 3 + 3\log 2 + 1}{\log 3 + 2\log 2 + 1}$$

$$\therefore K = \frac{3a + 2b + 1}{2a + b + 1}$$

Rpta.: D

Resolución 75: Supongamos que "K" es el equivalente, luego tenemos:

$$K = \log_{(xy)} \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{y}} \right) = \log_{(xy)} \sqrt[3]{x} - \log_{(xy)} \sqrt[5]{y}$$

$$K = \log_{(xy)} x^{\frac{1}{3}} - \log_{(xy)} y^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{3} \log_{(xy)} x - \frac{1}{5} \log_{(xy)} y$$

Por condición:

$$\log_{(xy)} x = 4$$

Por propiedad:

$$\log_{(xy)} (xy) = 1$$

$$\log_{(xy)} x + \log_{(xy)} y = 1$$

$$4 + \log_{(xy)} y = 1$$

$$\log_{(xy)} y = -3$$

Reemplazando en la expresión "K" se tendrá:

$$K = \frac{1}{3}(4) - \frac{1}{5}(-3) = \frac{4}{3} + \frac{3}{5}$$

$$\therefore K = \frac{29}{15}$$

Rpta.: B

Resolución 76: De acuerdo con la definición de antilogaritmos procedemos de la manera siguiente:

$$\text{anti log}_x \text{ anti log}_{\sqrt[4]{2}} 2^3 = 625$$

$$\text{anti log}_x \text{ anti log}_{\sqrt[4]{2}} 8 = 625$$

$$\text{anti log}_x \sqrt[4]{2}^8 = 625$$

$$\text{anti log}_x 2^2 = 625$$

$$\text{anti log}_x 4 = 625$$

$$x^4 = 625$$

$$\therefore x = 5$$

Rpta.: B

Resolución 77: La inecuación dada es:

$$|\log_5 x|^2 + 5|\log_5 x| - 14 < 0$$

$$(|\log_5 x| + 7)(|\log_5 x| - 2) < 0$$

Observa que $|\log_5 x| + 7 > 0 \forall x \in \mathbb{R}^+$, luego la inecuación se reduce a:

$$|\log_5 x| - 2 < 0$$

$$|\log_5 x| < 2$$

$$-2 < \log_5 x < 2$$

$$\log_5 5^{-2} < \log_5 x < \log_5 5^2$$

$$5^{-2} < x < 5^2$$

$$\frac{1}{25} < x < 25$$

$$\therefore \text{CS} = \left(\frac{1}{25}; 25 \right)$$

Rpta.: A

Resolución 78: La inecuación propuesta se puede reescribir así:

$$(2^{|x-1|})^2 - (2^{|x-1|}) - 56 \leq 0$$

$$(2^{|x-1|} - 8)(2^{|x-1|} + 7) \leq 0$$

Observa que $2^{|x-1|} + 7 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, luego la inecuación se reduce a:

$$2^{|x-1|} - 8 \leq 0$$

$$2^{|x-1|} \leq 2^3$$

$$|x-1| \leq 3$$

$$-3 \leq x-1 \leq 3$$

$$-2 \leq x \leq 4$$

Finalmente tenemos: $\text{CS} = [-2; 4]$

$\therefore$ Longitud = 6

Rpta.: E

Resolución 79: La fórmula de la función es:

$$y = F(x) = \log_2 \sqrt{1-x^2}$$

Por condición de existencia:

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$$

$$(x+1)(x-1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$\therefore \text{Dom}(F) = \langle -1; 1 \rangle$$

Rpta.: C

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

Resolución 80: Como se conoce el dominio, procedemos a construir el rango:

$$4 < x \leq 82$$

$$3 < x - 1 \leq 81$$

$$\log_3 3 < \log_3(x - 1) \leq \log_3 81$$

$$1 < \log_3(x - 1) \leq 4$$

$$2 < \log_3(x - 1) + 1 \leq 5$$

$$2 < y \leq 5$$

$$\therefore \text{Ran}(F) = (2; 5]$$

Rpta.: D

Resolución 81: Por condición de existencia:

$$\cos(2x) > 0; \sin x > 0; \cos x > 0$$

De donde podemos observar:

$$0 < 2x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots\dots(1)$$

La ecuación dada inicialmente:

$$\log_2 \cos(2x) - \log_2(\sin x) = 1 + \log_2(\cos x)$$

Por propiedades operativas:

$$\log_2 \left(\frac{\cos 2x}{\sin x} \right) = \log_2(2 \cos x)$$

$$\frac{\cos 2x}{\sin x} = 2 \cos x$$

Por seno del ángulo doble tenemos:

$$\cos 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

Por propiedad trigonométrica:

$$2x + 2x = \frac{\pi}{2}$$

$$4x = \frac{\pi}{2}$$

Finalmente de (1) y (2):

$$x = \frac{\pi}{8} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$x = \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ \frac{\pi}{8} \right\}$$

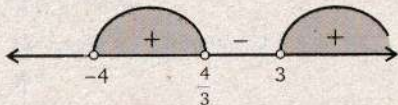
Rpta.: E

Resolución 82: Por condición de existencia:

$$\frac{x^2 + x - 12}{3x - 4} > 0$$

Por puntos de corte tenemos:

$$\frac{(x + 4)(x - 3)}{3x - 4} > 0$$



$$\therefore DF = \left(-4; \frac{4}{3}\right) \cup (3; \infty)$$

Rpta.: B

Resolución 83: La función dada es:

$$y = -\log(-x - 3)$$

Para el dominio:

$$-x - 3 > 0 \Leftrightarrow x + 3 < 0$$

$$x < -3$$

Intersección con el eje x:

$$y = 0 \Leftrightarrow -\log(-x - 3) = 0$$

$$-x - 3 = 1 \Leftrightarrow x + 3 = -1$$

$$x = -4$$

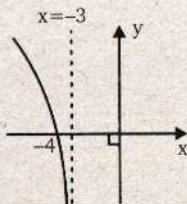
Ahora la intersección de la gráfica con el eje de abscisas esta ubicada en el punto $(-4; 0)$

Para la asíntota:

$$-x - 3 = 0$$

$$x = -3 \text{ ¡Asíntota vertical!}$$

Finalmente la gráfica será:



Rpta.: D

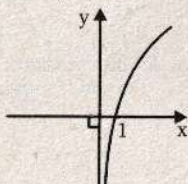
Resolución 84: La función es:

$$y = F(x) = |\log_3 |x||$$

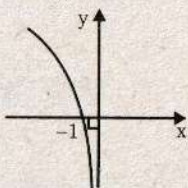
Grafiquemos:

$$y = \log_3 |x|$$

I) Si: $x > 0$, entonces: $y = \log_3 x$

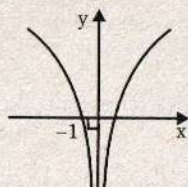


II) Si: $x < 0$, entonces: $y = \log_3 (-x)$

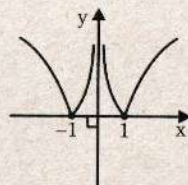


Uniendo (I) con (II) tenemos la gráfica de:

$$y = \log_3 |x|$$



Finalmente la gráfica de $y = F(x) = |\log |x||$ se obtiene al reflejar a través del eje x la parte negativa, veamos:



Rpta.: D

Resolución 85: Sea la fórmula buscada: $y = F(x) = b^x$; $b > 0 \wedge b \neq 1$

Por dato $\left(\frac{3}{2}; 27\right) \in F$, luego:

$$27 = b^{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt[3]{27^2} = b$$

De donde al efectuar tenemos:

$$b = 9$$

$$\therefore y = F(x) = 9^x$$

Rpta.: D

Resolución 86: De la gráfica podemos notar que:

$$b = 4 \text{ y } d = 0$$

Asimismo por el punto de paso:

$$y = \log_2(-x-3) \quad \dots\dots\dots(1)$$

Para la asíntota planteamos:

$$-x-3 = 0$$

$$x = -3$$

Con lo cual fácilmente notamos: $e = -3$

Como (a; b) y (c; d) son puntos de paso de la gráfica, estos deben verificar la relación (1).

$$\text{Para (a; b) planteamos: } b = \log_2(-a-3) \Rightarrow 4 = \log_2(-a-3)$$

Por definición de logaritmo:

$$16 = -a-3 \Rightarrow a = -19$$

$$\text{Para (c; d) planteamos: } d = \log_2(-c-3) \Rightarrow 0 = \log_2(-c-3)$$

$$\text{Por definición de logaritmo: } 1 = -c-3 \Rightarrow c = -4$$

$$\text{En consecuencia: } a = -19; b = 4; c = -4; d = 0; e = -3$$

$$\therefore a + b + c + d + e = -22$$

Rpta.: C

Resolución 87: De la ecuación (2) tenemos:

$$\log x = 2 \log y$$

Por condición de existencia:

$$x > 0 \wedge y > 0$$

Por propiedad operativa se tiene:

$$\log x = \log y^2$$

$$x = y^2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Reemplazando (3) en (1) tenemos:

$$\log^2(y^3) - \log^2(y) = 8$$

Por propiedad operativa tenemos:

$$(\log y^3)^2 - (\log y)^2 = 8$$

$$(3\log y)^2 - (\log y)^2 = 8$$

$$9(\log y)^2 - (\log y)^2 = 8$$

$$8(\log y)^2 = 8$$

$$(\log y)^2 = 1$$

De donde podemos notar que:

$$\log y = 1 \quad \vee \quad \log y = -1$$

$$y = 10 \quad \vee \quad y = \frac{1}{10}$$

Finalmente en la relación (3):

$$y = 10 \rightarrow x = 100$$

$$y = \frac{1}{10} \rightarrow x = \frac{1}{100}$$

$$\therefore CS = \left\{ (100; 10); \left(\frac{1}{100}; \frac{1}{10} \right) \right\}$$

Rpta.: B

Resolución 88:

Como: $0,3 = \frac{1}{3}$, tenemos: $\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}(2x+5) < -2$

Asimismo: $-2 = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} 9$, ahora:

$$\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}(2x+5) < \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} 9$$

Ahora debemos plantear: $2x+5 > 0 \wedge 2x+5 > 9$

$$x > -\frac{5}{2} \wedge x > 2$$

De la intersección resulta: $x > 2$

$\therefore$ Menor entero $x = 3$

Rpta.: C

Resolución 89: Sea el resultado de efectuar:

$$N = 5^{40} \cdot 2^{80} \dots\dots\dots(1)$$

Recordar que:

$$N^{\circ} \text{ de cifras de } N = \text{característica} + 1$$

En (1) tomamos logaritmo decimal:

$$\log N = \log(5^{40} \cdot 2^{80})$$

$$\log N = \log 5^{40} + \log 2^{80}$$

$$\log N = 40 \cdot \log 5 + 80 \cdot \log 2$$

Se sabe que $\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right)$, luego:

$$\log N = 40 \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) + 80 \cdot \log 2$$

$$\log N = 40 \cdot (\log 10 - \log 2) + 80 \cdot \log 2$$

$$\log N = 40 \cdot (1 - \log 2) + 80 \cdot \log 2$$

Reduciendo el segundo miembro:

$$\log N = 40 + 40 \log 2$$

Como $\log 2 = 0,30103$; tenemos:

$$\log N = 40 + 40 \cdot (0,30103)$$

$$\log N = 52,0412$$

Finalmente notamos que la característica es 52

$\therefore N$ tiene 53 cifras

Rpta.: E

Resolución 90: Observar que $x > 0 \wedge x \neq 1$:

$$\log_x \left(\frac{\ln x - e}{\ln x + e} \right)^{\log x} = \ln(e^{-1})$$

Por propiedad operativa: $\log x \cdot \log_x \left(\frac{\ln x - e}{\ln x + e} \right) = -1 \cdot \ln e$

Por regla de la cadena: $\log \left(\frac{\ln x - e}{\ln x + e} \right) = -1$

Por definición de logaritmo: $\frac{1}{10} = \frac{\ln x - e}{\ln x + e}$

$$\frac{\ln x + e}{\ln x - e} = 10$$

Por propiedad de proporciones: $\frac{\ln x}{e} = \frac{11}{9}$

$$\ln x = \frac{11e}{9}$$

Por definición de logaritmo: $e^{\frac{11e}{9}} = x$

$$x = \sqrt[9]{e^{11e}}$$

$$\therefore CS = \left\{ \sqrt[9]{e^{11e}} \right\}$$

Rpta.: D

Resolución 91:

La ecuación dada es: $(e^x)^3 - 2(e^x)^2 - 2(e^x) - 3 = 0$

Hagamos $e^x = m$: $m^3 - 2m^2 - 2m - 3 = 0$; $m > 0$

Por divisores binómicos: $(m-3) \cdot (m^2 + m + 1) = 0$

De donde planteamos: $m-3 = 0 \vee \underbrace{m^2 + m + 1 = 0}_{\text{No existe } m \in \mathbb{R}}$

Y al resolver obtenemos: $m = 3$

Con lo cual en verdad tenemos:

$$e^x = 3$$

Tomando logaritmo natural: $\ln e^x = \ln 3$

$$\therefore x = \ln 3$$

Rpta.: A

Resolución 92:

La desigualdad dada es: $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} \right) \leq \log_{\sqrt{3}} 3$

De donde debemos plantear: $\frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} \leq 3$

Como: $2 + |z| > 0$; $\forall z \in \mathbb{C}$: $|z|^2 - |z| + 1 \leq 6 + 3|z|$

$$|z|^2 - 4|z| - 5 \leq 0$$

Por aspa simple conseguimos:

$$(|z| - 5)(|z| + 1) \leq 0$$

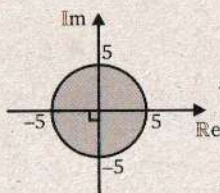
Como $|z| + 1 > 0$; $\forall z \in \mathbb{C}$: $|z| - 5 \leq 0$

$$|z| \leq 5 \quad \dots\dots\dots(1)$$

Sea $z = x + yi$, ahora en (1):

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &\leq 5 \\ x^2 + y^2 &\leq 5^2 \end{aligned}$$

Graficando la relación:



Finalmente el área pedida es:

$$A = \pi \cdot 5^2$$

$$\therefore A = 25 \pi \text{ u}^2$$

Rpta.: E

Resolución 93: La inecuación dada es: $\log_3 |3 - 4x| > \log_3 9$

De donde debemos plantear:

$$3 - 4x \neq 0 \quad \wedge \quad |3 - 4x| > 9$$

$$x \neq \frac{3}{4} \quad \wedge \quad |3 - 4x| > 9$$

Resolviendo para el valor absoluto:

$$|3 - 4x| > 9$$

$$3 - 4x > 9 \quad \vee \quad 3 - 4x < -9$$

$$-4x > 6 \quad \vee \quad -4x < -12$$

$$x < -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x > 3$$

Observar que en ambos casos $x \neq \frac{3}{4}$, finalmente:

$$\therefore CS = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (3; \infty)$$

Rpta.: A

Resolución 94: Sean "x" el total de fósiles que encontró el obrero, luego podemos plantear:

$$1^\circ \text{ fósil, recibe : } m = m$$

$$2^\circ \text{ fósil, recibe : } 2m = 2 \cdot m$$

$$3^\circ \text{ fósil, recibe : } 4m = 2^2 \cdot m$$

$$4^\circ \text{ fósil, recibe : } 8m = 2^3 \cdot m$$

...

$$x^\circ \text{ fósil, recibe : } = 2^{x-1} \cdot m$$

Por condición:

$$m + 2 \cdot m + 2^2 \cdot m + 2^3 \cdot m + \dots + 2^{x-1} \cdot m = n$$

$$m \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x-1}) = n$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x-1} = \frac{n}{m}$$

Por división notable podemos reescribir:

$$\frac{2^x - 1}{2 - 1} = \frac{n}{m} \rightarrow 2^x - 1 = \frac{n}{m}$$

$$2^x = \frac{n}{m} + 1 \rightarrow 2^x = \frac{m+n}{m}$$

Finalmente tomando logaritmo en base 2:

$$\log_2 2^x = \log_2 \left(\frac{m+n}{m} \right)$$

$$x \cdot \log_2 2 = \log_2 \left(\frac{m+n}{m} \right)$$

$$\therefore x = \log_2 \left(\frac{m+n}{m} \right)$$

Rpta.: B**Resolución 95:** Sea:

$$K = \left[\frac{\sqrt[n]{\log 2} + \sqrt[n]{\log 3} + \sqrt[n]{\log 4} + \dots + \sqrt[n]{\log N}}{\sqrt[n]{\ln 2} + \sqrt[n]{\ln 3} + \sqrt[n]{\ln 4} + \dots + \sqrt[n]{\ln N}} \right]^n$$

A base diez:

$$\sqrt[n]{\ln 2} = \sqrt[n]{\frac{\log 2}{\log e}} = \frac{\sqrt[n]{\log 2}}{\sqrt[n]{\log e}}$$

$$\sqrt[n]{\ln 3} = \sqrt[n]{\frac{\log 3}{\log e}} = \frac{\sqrt[n]{\log 3}}{\sqrt[n]{\log e}}$$

$$\sqrt[n]{\ln 4} = \sqrt[n]{\frac{\log 4}{\log e}} = \frac{\sqrt[n]{\log 4}}{\sqrt[n]{\log e}}$$

⋮

$$\sqrt[n]{\ln N} = \sqrt[n]{\frac{\log N}{\log e}} = \frac{\sqrt[n]{\log N}}{\sqrt[n]{\log e}}$$

Ahora en "K" se tendrá:

$$K = \left[\frac{\sqrt[n]{\log 2} + \sqrt[n]{\log 3} + \sqrt[n]{\log 4} + \dots + \sqrt[n]{\log N}}{\sqrt[n]{\log 2} + \sqrt[n]{\log 3} + \sqrt[n]{\log 4} + \dots + \sqrt[n]{\log N}} \cdot \sqrt[n]{\log e} \right]^n$$

$$K = \left[\sqrt[n]{\log e} \right]^n$$

$$\therefore K = \log e$$

Rpta.: A

Resolución 96: Sea el resultado: $N = (0,5)^{70}$
 Tomando logaritmo: $\log N = \log(0,5)^{70}$
 $\log N = \log(2^{-1})^{70} = \log 2^{-70}$
 Propiedad operativa: $\log N = -70 \cdot \log 2$
 Reemplazando log 2: $\log N = -70 \cdot (0,30103)$
 $\log N = -21,0721$

Ahora hallemos la característica de la manera siguiente:

$$\log N = -21 - 0,0721 + 1 - 1$$

$$\log N = -21 - 1 + \underline{1 - 0,0721}$$

$$\log N = -\underline{22} + \underline{0,9279}$$

Mantisa
 ↗
 Característica

Según la teoría: $|-22| = 22$ es la cantidad de ceros que tiene el número N a la izquierda de su primera cifra significativa, considerando al cero que está delante de la coma decimal, en el problema no debemos considerar a éste último cero.

$$\therefore \text{Rpta} = 21$$

Rpta.: C

Resolución 97: La inecuación dada es: $\log_2(3x + 2) - \log_2(1 - 2x) > 2 \dots\dots\dots(1)$
 Por condición de existencia:

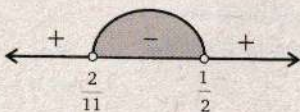
$$\begin{aligned} 3x + 2 &> 0 \quad \wedge \quad 1 - 2x > 0 \\ 3x &> -2 \quad \wedge \quad -2x > -1 \\ x &> -\frac{2}{3} \quad \wedge \quad x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Intersectando obtenemos: $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2} \dots\dots\dots(2)$

Propiedad operativa en (1):
 $\log_2 \left(\frac{3x + 2}{1 - 2x} \right) > \log_2 4$

Por puntos de corte tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{3x + 2}{1 - 2x} &> 4 \\ \frac{3x + 2}{1 - 2x} - 4 &> 0 \\ \frac{11x - 2}{1 - 2x} &> 0 \\ \frac{11x - 2}{2x - 1} &< 0 \end{aligned}$$



$$\frac{2}{11} < x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots(3)$$

Finalmente $(2) \cap (3)$:

$$\frac{2}{11} < x < \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{CS} = \left(\frac{2}{11}; \frac{1}{2} \right)$$

Rpta.: A

Resolución 98:

De acuerdo con el enunciado, podemos determinar la constante " K_0 " teniendo en cuenta los datos para las estrellas mas débiles, veamos:

$$m = K_0 - \frac{5}{2} \log \left(\frac{L}{L_0} \right)$$

Reemplazando datos:

$$6 = K_0 - \frac{5}{2} \log \left(\frac{L_0}{L_0} \right)$$

$$6 = K_0 - \frac{5}{2} \log(1)$$

$$6 = K_0 - \frac{5}{2} \cdot 0 \Rightarrow 6 = K_0$$

Halleemos " m " si $L = 10^{0.8} L_0$:

$$m = 6 - \frac{5}{2} \log \left(\frac{10^{0.8} L_0}{L_0} \right)$$

$$m = 6 - \frac{5}{2} \log(10^{0.8})$$

$$m = 6 - \frac{5}{2} \cdot 0.8 \cdot \log 10$$

$$m = 6 - \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1$$

$$\therefore m = 4$$

Rpta.: C

Resolución 99:

La inecuación es:

$$\log_{\left(\frac{25-x^2}{16}\right)} \left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > \log_{\left(\frac{25-x^2}{16}\right)} \left(\frac{25-x^2}{16}\right)$$

Como la base no es determinada debemos plantear los dos casos existentes para ella, siendo la solución la unión de dichos casos intersectado con la condición de existencia.

CASO (I):

$$0 < \frac{25-x^2}{16} < 1 \quad \wedge \quad \frac{24-2x-x^2}{14} < \frac{25-x^2}{16}$$

$$0 < 25-x^2 < 16 \quad \wedge \quad 192-16x-8x^2 < 175-7x^2$$

$$-25 < -x^2 < -9 \quad \wedge \quad -x^2 - 16x + 17 < 0$$

$$9 < x^2 < 25 \quad \wedge \quad x^2 + 16x - 17 > 0$$

$$(-5 < x < -3 \vee 3 < x < 5) \quad \wedge \quad (-\infty < x < -17 \vee 1 < x < \infty)$$

SOLUCIÓN (I):

$$3 < x < 5 \quad \leftrightarrow \quad x \in \langle 3; 5 \rangle$$

CASO (II):

$$\frac{25-x^2}{16} > 1 \quad \wedge \quad \frac{24-2x-x^2}{14} > \frac{25-x^2}{16}$$

$$25-x^2 > 16 \quad \wedge \quad 192-16x-8x^2 > 175-7x^2$$

$$9-x^2 > 0 \quad \wedge \quad -x^2 - 16x + 17 > 0$$

$$x^2 - 9 < 0 \quad \wedge \quad x^2 + 16x - 17 < 0$$

$$(x+3)(x-3) < 0 \quad \wedge \quad (x+17)(x-1) < 0$$

$$(-3 < x < 3) \quad \wedge \quad (-17 < x < 1)$$

SOLUCIÓN (II):

$$-3 < x < 1 \quad \leftrightarrow \quad x \in \langle -3; 1 \rangle$$

Condición de existencia:

$$\frac{24-2x-x^2}{14} > 0$$

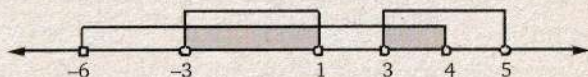
$$24-2x-x^2 > 0$$

$$x^2 + 2x - 24 < 0$$

$$(x+6)(x-4) < 0$$

$$-6 < x < 4$$

Finalmente en la recta:



$$\therefore \text{CS} = \langle -3; 1 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle$$

Rpta.: B

Resolución 100: La inecuación dada es:

$$\frac{2^{\log_x \left(\frac{2}{x}\right)} \cdot 2^{7 \log_x 2}}{x^{6 \log_x 2}} \geq x$$

Por existencia tenemos:

$$x > 0 \wedge x \neq 1 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{2^{\log_x 2 - \log_x x + 7 \log_x 2}}{x^{\log_x 2^6}} \geq x$$

$$\frac{2^{8 \log_x 2 - 1}}{2^6} \geq x$$

$$2^{8 \log_x 2 - 7} \geq x$$

Como: $x = 2^{\log_2 x}$, tenemos:

$$2^{8 \log_x 2 - 7} \geq 2^{\log_2 x}$$

$$8 \log_x 2 - 7 \geq \log_2 x$$

Por propiedad tenemos:

$$\frac{8}{\log_2 x} - 7 \geq \log_2 x$$

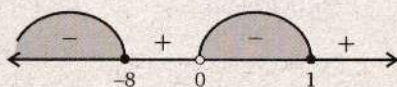
$$\frac{8 - 7 \log_2 x}{\log_2 x} - \log_2 x \geq 0$$

$$\frac{8 - 7 \log_2 x - (\log_2 x)^2}{\log_2 x} \geq 0$$

$$\frac{(\log_2 x)^2 + 7(\log_2 x) - 8}{\log_2 x} \leq 0$$

$$\frac{(\log_2 x + 8)(\log_2 x - 1)}{\log_2 x} \leq 0$$

En la recta tenemos:



$$\log_2 x \leq -8 \quad \vee \quad 0 < \log_2 x \leq 1$$

$$\log_2 x \leq \log_2 2^{-8} \quad \vee \quad \log_2 1 < \log_2 x \leq \log_2 2$$

$$x \leq 2^{-8} \quad \vee \quad 1 < x \leq 2$$

$$x \leq \frac{1}{256} \quad \vee \quad 1 < x \leq 2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Finalmente de } (1) \cap (2): \quad 0 < x \leq \frac{1}{256} \quad \vee \quad 1 < x \leq 2$$

$$\therefore \text{CS} = \left(0; \frac{1}{256}\right] \cup (1; 2]$$

Rpta.: A



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el logaritmo de $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ en base $\sqrt{5\sqrt{5}}$.

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{4}{3}$

2. Reducir: $K = \log_4 2 + \log_{\sqrt[3]{3}} 3 + 1$

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{9}{2}$
D) $\frac{11}{2}$ E) $\frac{13}{2}$

3. Calcular x:
 $x \log 4 + \log(\log 3) = \log(\log 9)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) $\frac{1}{2}$

4. Calcular x en:
 $6^{\log_2 3} + 10^{\log x} = 3^{\log_2 6} + \log_{\sqrt{x}} x$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) $\sqrt{2}$

5. Calcular $\sqrt[3]{x}$ en:
 $\log_7 5^{\log_7 \log_5 x} = \log \log_5 x$

A) $\frac{1}{5}$ B) 2 C) 5
D) $\frac{1}{2}$ E) $\sqrt{5}$

6. Calcular:

$$\text{Co log}_6 \text{ Anti log}_3 (\log_3 12 + 1)$$

A) 2 B) -2 C) 3
D) -3 E) $\frac{1}{2}$

7. Un valor de x en

$$9^{\log_9 (x^2 - 5)} = 6x - 13 \text{ es:}$$

A) 2
B) 4
C) 8
D) 6
E) Más de una es correcta

8. COLUMNA (A)

El equivalente de:

$$\log_{\sqrt[3]{4}} 2$$

COLUMNA (B)

El equivalente de:

$$\log_{\sqrt[3]{25}} 5$$

A) A es mayor que B
B) A es menor que B
C) A es igual que B
D) !No utilizar esta opción
E) No se puede determinar

9. Calcular el logaritmo en base 16 del logaritmo de $2\sqrt{2}$ en base 8

A) $-\frac{1}{4}$ B) 4 C) -4
D) $\frac{1}{2}$ E) -8

10. Si: $a^3 b^3 = a + b$; $ab \neq 1 \wedge a + b > 0$

Calcular x de: $(a+b)^{\log_{ab} x} = 64$

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 8
D) 4 E) 6

11. Determine el valor de x en:

$$\frac{\log_7(x^2 + 9x - 5)}{\log_7 \sqrt[5]{x+4}} = 10$$

A) 9 B) 13 C) 21
D) 11 E) 15

12. Calcular " x " en:

$$\begin{cases} \log x - \log y = \log 2 & \dots (1) \\ 2^{x+y} = 64 & \dots (2) \end{cases}$$

A) 2 B) 8 C) 6
D) 4 E) $\frac{1}{4}$

13. Resolver:

$$\log_x \left(\frac{12}{x} \right) - \ln e = \log_{(e+5)} \sqrt[3]{(e+5)^{-2}} + \text{Co} \ln \sqrt[3]{e}$$

A) {1} B) {12} C) {19}
D) {7} E) $\mathbb{R}^+$

14. Marcar verdadero (V) o falso (F)

I) $\log_x x = 1$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$
II) $\log^2 x = \log x$ sólo cuando $x=1$
III) $x^{\log_4 4} = 4$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$

A) VFV B) VVV C) FFF
D) FVF E) FFV

15. Luego de resolver la ecuación:

$$x + \log(1+2^x) = x \log 5 + \log 6$$

Calcular: $x+1/\sqrt{x-1}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 8

16. Sabiendo que:

$$\text{Antilog}_c \text{Antlog}_a b = ab; a, b, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Reducir: $\text{Colog}_c a + \text{Colog}_c b$

A) 0 B) a^b C) ab
D) $-ab$ E) $-a^b$

17. Un valor de x en:

$$3 \log(2x) + 2 \log x = \log \left(\frac{1}{4} \right) \text{ es:}$$

A) 0,5 B) 1 C) -5
D) 2 E) -0,5

18. Resolver:

$$\frac{\text{CologAntilog}_x}{\text{LogLog}_x} \log(x) = 0,01$$

A) {0} B) {1} C) {2}
D) {3} E) {4}

19. Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación:

$$5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$$

Calcular: $\log_2(x_1 \cdot x_2)$

- A) 2 B) -2 C) 0
D) 1 E) -1

20. Determinar el Dominio de la siguiente función:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = F(x) = \log_{\pi} \sqrt{16 - x^2}$$

- A) $\langle -2; 2 \rangle$ B) $\langle -4; 4 \rangle$
C) $\langle 0; 2 \rangle$
D) $\langle 0; 4 \rangle$ E) $\langle -\infty; 4 \rangle \cup \langle 4; \infty \rangle$

21. Calcular x en:

$$\log_5(1 - x) = 2$$

- A) 24 B) 23 C) -23
D) -24 E) -25

22. Reducir:

$$K = \log_2 8 - \text{Co} \log_3 9 - \text{Antilog}_{\sqrt[3]{3}} 5$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) -2 E) -3

23. COLUMNA (A)

El equivalente de: $\log_{\sqrt[2]{2}} 8$

COLUMNA (B)

El equivalente de: $\log_{\sqrt[5]{5}} 125$

- A) A es mayor que B
B) A es menor que B
C) A es igual que B
D) ¡No utilizar esta opción!
E) No se puede determinar

24. Simplificar:

$$\frac{\log_2 4 + \log_{(1/2)} 4}{\log_3 243 + \log_{(1/3)} 81}$$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

25. Calcular "b" si:

$$\log_b \sqrt[4]{125} = \frac{3}{2}$$

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$
D) 5 E) 25

26. Reducir:

$$\log_{\sqrt[5]{5}} \sqrt[5]{5} + \log_{\sqrt[3]{3}} 27\sqrt[3]{27} - 2^{\log_2 \sqrt[5]{5}}$$

- A) 13 B) $\frac{13}{2}$ C) 27
D) $\frac{27}{2}$ E) $\frac{29}{2}$

27. Calcular "x" en:

$$6^{\log_2 3} + 10^{\log x} = 3^{\log_2 6} + \log_{\sqrt{x}} x$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

28. Calcular la suma de los 999 primeros términos de la sucesión:

$$\log(1+1); \log\left(1+\frac{1}{2}\right); \log\left(1+\frac{1}{3}\right); \dots$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) 7 C) $\frac{3}{2}$
D) 5 E) 3

29. Calcular
- x
- en:

$$\text{Antilog}_x \text{ Antilog}_x 3 = 3$$

- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt[3]{3}$ C) $3\sqrt{3}$
 D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

30. Calcular "
- x
- " en:

$$3 \log(2x) + 2 \log x = \log(0,25)$$

- A) 0,5 B) 1 C) 5
 D) 2 E) 0,125

31. Calcular "
- x
- " en:

$$x \log 4 + \log(\log 3) = \log(\log 81)$$

- A) 6 B) 1 C) 8
 D) 5 E) 4

32. El equivalente de:

$$\log_3(\log_6(\log_6 12 + \log_6 3) + \log_6 108)$$

es:

- A) -1 B) 0 C) 1
 D) 2 E) -2

33. Resolver:

$$1 + 2 \log x - \log(7x + 12) = 0$$

- A) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ B) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ C) $\left\{\frac{2}{5}\right\}$
 D) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ E) $\left\{\frac{7}{4}\right\}$

34. Determine el mayor valor de "
- x
- " en:

$$5^{\log_{11}(x^2 - 7x + 21)} = 3^{\log_{11} 25}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

35. Calcular "
- x
- " de:

$$\frac{\log(\sqrt{x^3} + 19)}{\log(\sqrt{x} + 1)} = 3$$

- A) 5 B) 4 C) 3
 D) 2 E) 1

36. La suma de cifras de aquel número "
- x
- " que satisface la ecuación:

$$\frac{\log_3 x + 1}{\log_x 3 + 1} = 5$$

es:

- A) 6 B) 7 C) 8
 D) 9 E) 10

37. Reducir:

$$\log_4 \sqrt[3]{32} + \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^{\sqrt{3}} + \log_{27} \sqrt{3}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$
 D) 4 E) $\frac{5}{2}$

38. Resolver:

$$e^{\ln x} + e^{\ln(x^{-1})} = \ln e^2$$

- A) $\{ \}$ B) $\{0\}$ C) $\{1\}$
 D) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ E) $\{e\}$

39. El equivalente de:

$$\log_e \log_{16} 64^{\ln 100}$$

es:

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 9 E) $\frac{9}{4}$

40. Si: $\log 2 = a$ y $\log 3 = b$
Determine el logaritmo de 5 en base 6.

A) $\frac{a}{b}$ B) $\frac{a+b}{a-b}$ C) $\frac{a+b}{ab}$
D) $\frac{1-a}{a+b}$ E) $\frac{a-1}{a+b}$

41. La suma de los cuadrados de dos números es 29 y la suma de sus logaritmos decimales es 1, luego los números son:

A) -2 y -5 B) 4 y 5
D) 2 y 5
C) 2 y -5 E) 3 y 20

42. El logaritmo de "x" en base 5 es el mismo que el logaritmo de "y" en base $\sqrt{5}$. Si:

$x + y = \frac{3}{4}$, calcular: $\frac{y}{x}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 2
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{6}$

43. Si: $\log 700 = 2,8451$.
Calcular: $\log_7 70$

A) 2,16 B) 2,15 C) 1,87
D) 2,18 E) 1,82

44. Resolver:

$\log(x-2) > \log 2$

A) $\langle 2; \infty \rangle$ B) $\langle -\infty; 2 \rangle$ C) $\langle 4; \infty \rangle$
D) $\langle -\infty; 4 \rangle$ E) $\mathbb{R} - \{2\}$

45. Si: $0 < a^9 < a^6$.

Resolver:

$\log_{a^3}(x-1)^2 < \log_{a^2}[(x-1)\sqrt[3]{3-x}]$

A) $\langle 1; 3 \rangle$ B) $\langle 2; 3 \rangle$ C) $\langle -\infty; 2 \rangle$
D) $\langle -\infty; 3 \rangle$ E) $\langle 0; 1 \rangle$

46. ¿Cuántos ceros entre la coma decimal y la primera cifra significativa tiene el número $(0,02)^{70}$?

A) 70 B) 140 C) 110
D) 118 E) 120

47. Despejar "x" de:

$a^{3-x} \cdot b^{5x-1} = a^{x+5} \cdot b^{3x+1}$

A) $\frac{\log b + \log a}{\log b - \log a}$ B) $\frac{1}{\log b - \log a}$
C) $\frac{\log b - \log a}{\log b + \log a}$
D) $\frac{\log b - \log a}{3}$ E) $\frac{\log a + \log b}{2}$

48. Calcular "x":

$10^x + 10^{-x} = 3$

A) $\log\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$
B) $10^{3 \pm \sqrt{5}}$
C) $\log\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) - \log 10$
D) $\log\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
E) $\log(3 \pm \sqrt{5})^2$

BOLETÍN DE ÁLGEBRA - 11

49. Sean "x" $\wedge$ "y" números mayores que 1. ¿Cuál o cuáles de las proposiciones:

I. $\sqrt{x} > y^2 \leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\ln x} > e^{2\ln y}$

II. $x > y \rightarrow e^x < e^{100y}$

III. $x > y^2 \leftrightarrow e^{\ln x} > e^{y^2}$

son correctas?

- A) I y II B) II y III C) Sólo I
D) I y III E) Sólo II

50. Si: $\log_3 x = n \log_6 x$
 $\log_2 3 = m$

¿Cuál es el valor de "n"?

- A) $1 + m$ B) $\frac{m}{m+1}$ C) $\frac{1+m}{m}$
D) $\frac{1}{1+m}$ E) $\frac{m}{2}$

51. La suma de las componentes de la solución del sistema; es:

$$\begin{cases} 25^{x^2} = \sqrt{5}^{y^2} \dots\dots(1) \\ \ln x = 2 \ln y \dots\dots(2) \end{cases} \text{ ; es:}$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) 1
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{4}$

52. Resolver:

$$\begin{cases} 2\log_3 x + 2\log_3 y = 0 \dots\dots(1) \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \dots\dots(2) \end{cases}$$

- A) $\left\{ \left(2; \frac{1}{2} \right), \left(-2; -\frac{1}{2} \right) \right\}$ B) $\left\{ \left(2; \frac{1}{2} \right) \right\}$
C) $\left\{ \left(2; \frac{1}{4} \right) \right\}$
D) $\left\{ \left(\frac{1}{2}; 2 \right) \right\}$ E) $\left\{ \left(-\frac{1}{2}; 2 \right) \right\}$

53. Simplificar:

$$[\log_x 100][\log_{(x+1)}(x+1)]; x > 2$$

- A) 2 B) 10 C) 1
D) 5 E) 8

54. De la igualdad: $x = a^{\log_a x}$, se cumple si y sólo si:

- A) $a > 0; x \in \mathbb{R}$
B) $a > 1; x \in \mathbb{R}^*$
C) $a \neq 1; x > 0; a > 0$
D) $a \in \mathbb{R} - \{1\}; x \in \mathbb{R}^*$
E) $a > 1; x > 0$

55. La suma de los valores que asume "x" en:

$$\log_4(2x^2 + 15x + 26) = 3$$

es:

- A) $-\frac{15}{2}$ B) $\frac{17}{2}$ C) 2
D) $\frac{13}{2}$ E) N.A.

56. Si: $a_k = \frac{K+1}{K}$. Calcular:

$$\log_b a_1 + \log_b a_2 + \dots + \log_b a_{99}$$

$$\text{Siendo: } b = \sqrt[7]{10}^4$$

- A) 3 B) 4 C) 3,5
D) 4 E) 2,5

57. ¿Para qué valores de "x" está definida la expresión y, donde:

$$y = \sqrt{\ln \sqrt{\ln x}} ?$$

- A) $x \geq e^e$ B) $x \geq e^{2e}$ C) $x \geq 2e$
D) $x \geq e^2$ E) $x \geq e$

58. Si: $\log_{(a^2+b)} 2(a^4+b^2-4) = 2$

Calcular: $\sqrt[3]{|a^2-b|^{\log_2 25}}$

- A) 25 B) -2 C) 3
D) 4 E) 5

59. Determine su dominio maximal de la función F, donde:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = F(x) = \ln \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + 1 \right]$$

- A) $(-2; 2)$
B) $\mathbb{R}$
C) $(-\infty; -2) \cup [2; \infty)$
D) $[-2; 2]$
E) $(-\infty; 1] \cup [4; \infty)$

60. Si: $\log_a bc = x^n$

$$\log_b ac = y^n$$

$$\log_c ab = z^n$$

Simplificar:

$$\frac{1}{n} \cdot \left[n \sqrt{\frac{1}{x^n+1} + \frac{1}{y^n+1} + \frac{1}{z^n+1}} \right]$$

- A) $2n$ B) n C) n^2
D) $\frac{1}{n}$ E) $\frac{n}{2}$

61. La fórmula de la inversa de F, donde:
 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = F(x) = \log_2(x-2) + \log_2(x+2)$
es:

- A) $F^*(x) = -x^2 + 4$
B) $F^*(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
C) $F^*(x) = \sqrt{2^x - 4}$
D) $F^*(x) = -\sqrt{2^x + 4}$
E) $F^*(x) = \sqrt{2^x + 4}$

62. ¿Cuántos números naturales "x" verifican:

$$\log_2(2x+4) < \log_2(5x+3) ?$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

63. Si se suma el número de cifras de efectuar: 324^{50} , con el número de ceros que presenta entre la coma decimal y la primer cifra significativa del resultado de efectuar $(0,02)^{100}$ se obtiene:

- A) 294 B) 295 C) 266
D) 297 E) 298

64. En base diez el doble del logaritmo de "n" excede en una unidad al logaritmo del número "n" que se obtiene aumentando los $\frac{11}{10}$ a "n".
¿Cuál es la suma de cifras de "n"?

- A) 3 B) 8 C) 5
D) 6 E) 11

65. Resolver:

$$\log_{(0,5)}(x-4) > -2$$

- A) $\langle 4; 8 \rangle$ B) $\langle 0; 8 \rangle$ C) $\langle 0; 4 \rangle$
D) $\langle 4; \infty \rangle$ E) $\langle 8; \infty \rangle$

66. Calcular "x" en:

$$\frac{1 + \log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3})} = 1$$

- A) 5 B) -5 C) 3
D) 2 E) 12

67. Al resolver:

$$\log_2 x + \frac{1}{2}(\log_2 x)^2 = \log_4 8$$

Se afirma que:

- A) Las soluciones suman -2
 B) El producto de soluciones es -3
 C) Las soluciones suman 10
 D) El producto de soluciones es: $1/4$
 E) Su conjunto solución es vacío

68. Calcular
- $\sqrt{y}$
- del sistema:

$$\begin{cases} 2^x - \sqrt{y} = 0 & \dots\dots(1) \\ x^2 + 5(5 - \log_2 y) = 0 & \dots\dots(2) \end{cases}$$

- A) 1024 B) 16 C) 512
 D) 4 E) 32

69. Resolver:

$$[\log_{(3x)} 4] \cdot [\log_4 x] \cdot [\log_x 27x^3] = 3$$

- A) $\mathbb{R}$ B) $[0; \infty)$
 C) $\langle 0; \infty \rangle - \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$
 D) $\langle 0; \infty \rangle - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ E) $\{3\}$

70. Calcular "x" en:

$$\log \log \log x = 0$$

- A) 1 B) 10^5 C) 5^{10}
 D) 100^5 E) N.A.

71. Hallar "x":

$$x^{\left[\frac{\log_a(\log_a x)}{\log_a x} \right]} + b = 0$$

- A) ab B) a^{-b} C) a^b
 D) b^a E) b^{-a}

72. Calcular "x" en:

$$2(2^{\log_5 x}) = \text{Antilog}(3 \log 2)$$

- A) 5 B) 25 C) $\sqrt{5}$
 D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{25}$

73. La suma de los valores de "x" en:

$$\log_7(x-2) + \log_7(x-5) = 2 \log_7 2$$

es:

- A) 5 B) 6 C) 7
 D) 8 E) 1

74. Determine el producto de las raíces de la ecuación:

$$m \cdot \log_x 4 = n - \log_4 x$$

Siendo "m" y "n" diferentes de cero.

- A) 0 B) 1 C) 2m
 D) $\frac{n}{m}$ E) $\frac{m}{n}$

75. Determine "x":

$$\frac{4 \log_3 x - (\log_x 3)^{-1}}{\log_3 x} = 243 \log_x 3$$

- A) 80^3 B) 3^{81} C) 3^{27}
 D) 3^{80} E) 81^3

76. Si:
- $\log_3 5 = a$
- , entonces
- $\log_{15} 81$
- es:

- A) $\frac{4}{a+1}$ B) $\frac{1}{a+4}$ C) $\frac{4}{a+2}$
 D) $\frac{2}{a+1}$ E) $3(a+2)^2$

77. Calcular "x" en:

$$\log_{(2x)}(0,25) + \log_{\left(\frac{x}{8}\right)} 2 + \log_{(8x)} 2 = 0$$

- A) 2^{-6} B) 2^{-7} C) 2^{-8}
D) 2^{-9} E) 2^{-10}

78. Resolver: $\log_{(0,5x)} 2 - \log_x 2 > 1$

- A) $\langle -\infty; 2 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$ B) $\mathbb{R} - \{1\}$
C) $\langle 0; 1 \rangle \cup \langle 3; \infty \rangle$
D) $\langle 0; 2 \rangle \cup \langle 2; \infty \rangle$ E) N.A.

79. Un intervalo solución de:

$$x^{2-\log_2 x} - \log_2 x^2 > \frac{1}{x}; \text{ es:}$$

- A) $\langle 0; 1 \rangle$ B) $\langle 1; 5 \rangle$ C) $\left\langle -1; \frac{1}{2} \right\rangle$
D) $\left\langle \frac{1}{8}; \frac{1}{2} \right\rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{1}{8} \right\rangle$

80. Calcular: $\log_{2\sqrt{2}} x$, si:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 2^{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{x}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) $-\sqrt{2}$ C) 4
D) -4 E) N.A.

81. Si: $\log_b \sqrt[3]{b(\sqrt{b+1}+1)^2} = 0,5$

$$\text{Calcular: } \log_b \sqrt[7]{[b(\sqrt{b+1}-1)]^3}$$

- A) $\frac{22}{23}$ B) $\frac{24}{25}$ C) $\frac{25}{26}$
D) $\frac{26}{27}$ E) $\frac{27}{28}$

82. ¿Para qué valores de "a" se define en $\mathbb{R}$ la siguiente ecuación:

$$x^2 - 4x - \log_2 a = 0?$$

- A) $a > \frac{1}{16}$ B) $a \geq \frac{1}{16}$
C) $a < \frac{1}{16}$
D) $a \leq \frac{1}{16}$ E) N.A.

83. Calcular "x" en:

$$\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \log_4 \sqrt{\frac{2}{x}} = 2$$

- A) 3 B) 6 C) 9
D) $\sqrt{2}$ E) N.A.

84. Determine la suma de los valores que asume x en:

$$(\log_x 2) \cdot \left[\log_{\left(\frac{x}{16}\right)} 2 \right] = \log_{\left(\frac{x}{64}\right)} 2$$

- A) 2 B) 4 C) 8
D) 12 E) 20

85. La solución de:

$$3[\log_2(\sin x)]^2 + \log_2[1 - \cos(2x)] = 2$$

es:

- A) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi$ B) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$
C) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
D) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ E) N.A.

86. La inecuación:

$$\log_{(0,5)} x + \log_3 x > 1$$

Es equivalente a:

- A) $0 < x < 1$
 B) $0 < x < 3^{\log_{(2/3)} 2}$
 C) $2 < x < 3^{\log 2}$
 D) $0 < x < 3^{\log(3/2)}$
 E) N.A.

87. Calcular
- $\log y$
- , si:

$$y = \log_{\sqrt{2}} \text{Antilog}_4 \sqrt{2} \text{Colog}_{\sqrt{2}} 8$$

- A) $-3 \log 3$ B) $2 \log 3$
 C) $-2 \log 3$
 D) $3 \log 2$ E) $\neq$ en $\mathbb{R}$

88. Si:
- $x > 0$
- tal que:
- $x^{e^{\log_2 x}} = e^x$
- .
-
- Calcular:

$$\frac{\ln(\ln \sqrt[3]{x} - x)}{\text{Colog}_2 \left(\frac{x}{2^x} \right)}$$

- A) -1 B) x C) 0
 D) e E) 1

89. Calcular "x" en:

$$\sqrt{\text{Colog } x} + \log \sqrt{x} = 0,5$$

- A) 10 B) 1 C) 0,1
 D) 0,01 E) $\neq$

90. Simplificar:

$$\left[\frac{\sum_{k=2}^n \sqrt[n]{\ln k}}{\sum_{k=2}^n \sqrt[n]{\log k}} \right]^n$$

- A) 0,4343 B) 2,3026 C) 2,7183
 D) 10 E) e^2

91. Determine el dominio de la siguiente función:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = F(x) = \log_{(4x-3)}(3-2x)$$

- A) $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right) - \{1\}$ B) $\left(0; \frac{3}{2} \right)$
 C) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right)$
 D) $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right) - \{1\}$ E) $\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right)$

92. Calcular:
- $x^2 + x + 1$
- , si:

$$\log \left(\frac{5x}{2} \right) \left(\frac{x}{10} \right) + \log_5^2 \left(\frac{x}{2} \right) = 1$$

- A) 13 B) 31 C) 43
 D) 111 E) N.A.

93. Si:
- $x < 1$
- , resolver:

$$(\ln x) \cdot (\ln \sqrt{x}) < 1$$

- A) $\langle -\infty; \infty \rangle$ B) $\langle -\infty; e \rangle$ C) $\langle -\infty; \sqrt[3]{e} \rangle$
 D) $\langle \sqrt[3]{e}; \infty \rangle$ E) $\langle 1; \sqrt[3]{e} \rangle$

94. Resolver:

$$\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$$

- A) $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{4} \right) \cup \langle 5; \infty \rangle$
 B) $\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2} \right) \cup \langle 6; \infty \rangle$
 C) $\left(0; \frac{1}{4} \right) \cup \langle 4; \infty \rangle$
 D) $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{5} \right)$
 E) N.A.

95. Un capital "c" colocado a intereses semestral de compuesto con capitalización intereses se cuadruplica en 2 años ¿en cuántos años más el capital será 8c?

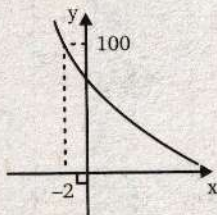
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

96. Marcar verdadero (V) o falso (F)

() $\log_{0,3} 2 > 0$
() $\log_{0,5} 0,4 < 0$
() $\log(0,5) < 0$
() $\ln 4 < 0$

A) FFVF B) VVVF C) FVVF
D) VVVF E) FFFV

97. Calcular: $F(-3)$; si $F(x)$ es una función exponencial de gráfica:

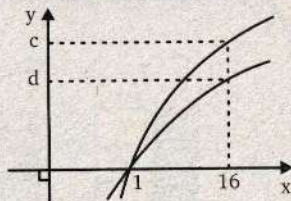


A) 1000 B) 100 C) 10000
D) 10^{-3} E) 10^{-2}

98. Sea la función: $y = F(x) = a^{3x^2-x-2}$ tal que: $0 < a < 1$ para que se cumpla que: $F(x) < 0$, es necesario que:

A) $-\frac{1}{3} < x < 2$ B) $x > 2$
D) $x < 2$
C) $x < -\frac{1}{3}$ E) $\nexists$ tal x

99. De las gráficas de: $y = F(x) = \log_4 x$ y $y = G(x) = \log_{16} x$, calcular: c/d



A) 1/3 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 3

100. Determine el dominio de la función F , donde:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid y = F(x) = \log_{\lfloor x - \sqrt{x} \rfloor} |x|$$

A) $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$ B) $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
C) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$
D) $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$ E) N.A.

**CLAVES**

1	A
2	C
3	E
4	A
5	C
6	B
7	B
8	C
9	A
10	D
11	C
12	D
13	B
14	C
15	A
16	E
17	A
18	C
19	E
20	B
21	D
22	B
23	C
24	A
25	C

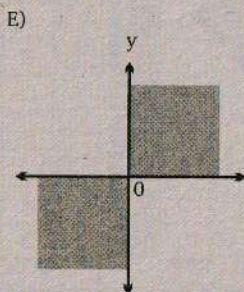
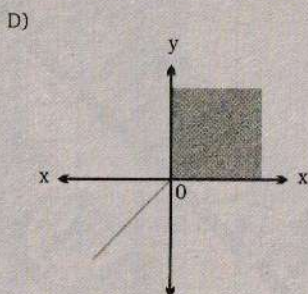
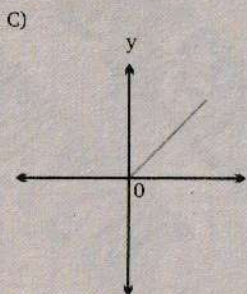
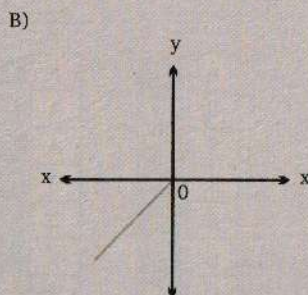
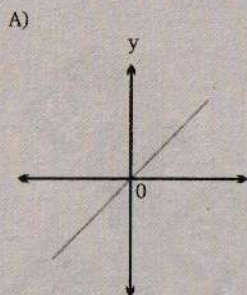
26	D
27	B
28	E
29	E
30	A
31	E
32	C
33	D
34	D
35	B
36	C
37	D
38	C
39	E
40	D
41	D
42	C
43	D
44	C
45	C
46	B
47	C
48	A
49	C
50	C

51	A
52	A
53	A
54	E
55	C
56	C
57	A
58	E
59	C
60	D
61	E
62	A
63	C
64	C
65	E
66	A
67	C
68	B
69	A
70	D
71	B
72	B
73	C
74	E
75	B

76	A
77	B
78	E
79	E
80	B
81	B
82	D
83	D
84	D
85	C
86	C
87	D
88	D
89	E
90	C
91	D
92	B
93	C
94	C
95	C
96	C
97	B
98	E
99	D
100	B

**EXÁMENES DE
ADMISIÓN
UNI - UNMSM**

PROBLEMA 01: Dada la siguiente relación: $y - |y| = x - |x|$; diga cuál de las siguientes gráficas es la que le corresponde:



Resolución:

De:

$$y - |y| = x - |x| \dots (1)$$

Si:

$$y \geq 0, 0 = x - |x|$$

$$\Rightarrow |x| = x \geq 0$$

Así (1) se verifica para $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Si:

$$y < 0, 2y = x - |x| < 0$$

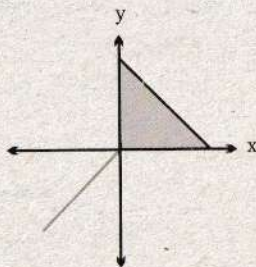
$$\Rightarrow x < |x|$$

Entonces $x = y < 0$

$$y - |y| = x - |x| \text{ si y solo si:}$$

$$x = y < 0 \vee (x \geq 0 \wedge y \geq 0)$$

Por lo tanto:

**Rpta.: D****PROBLEMA 02:**Si las raíces de la ecuación: $x^2 - (a+d)x + ad-bc = 0$ son $x_1 = 3, x_2 = 5$; y las raíces de la ecuación $y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3$ $bcd)y + (ad-bc)^3 = 0$ son y_1, y_2 .Entonces el valor de $y_1^2 y_2^2 + y_1 y_2^2$ es:

- A) 213 000
D) 513 000

B) 313 000

- C) 413 000
E) 613 000

Resolución:

De la primera ecuación:

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

se tiene:

$$a+d=8 \quad y \quad ad-bc=15 \quad \dots (1)$$

De la segunda ecuación:

$$y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad-bc)^3 = 0$$

se tiene:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd \\ &= a^3 + d^3 + 3bc(a+d) \\ &= a^3 + d^3 + 3(ad-15)(a+d) \\ &= \underbrace{a^3 + d^3 + 3a^2d + 3ad^2}_{(a+d)^3} - 45(a+d) \end{aligned}$$

$$y_1 + y_2 = (a+d)^3 - 45(a+d)$$

$$= 8^3 - 45(8) = 152$$

$$y_1 + y_2 = (ad-bc)^3 = 15^3$$

$$y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2$$

$$= y_1 y_2 (y_1 + y_2)$$

$$= (15^3)(152)$$

$$= 513000$$

Rpta.: D**PROBLEMA 03:**

Sean A, B conjuntos no-vacios. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si: $(x, y); (x, z) \in f = \{(x, y)/x \in A, y \in B\} \subset A \times B$ implica que $y = z$, entonces podemos decir que f es una función de A en B.II. Toda función sobreyectiva $f: A \rightarrow B$ es inyectiva.III. Toda función inyectiva $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva.A) VVV
D) FFV

B) VFV

C) VFF
E) FFF

Resolución:

I. VERDADERO

Es la definición de función como conjunto de pares ordenados.

II. FALSO

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ con $f(x) = x^2$ es sobreyectiva pero no es inyectiva, pues $f(1) = f(-1)$.

III. FALSO

Sea $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = x^3$ es inyectiva pero no es sobreyectiva, pues si $g(r) = -1 \in \mathbb{R}$ se tiene $r = -1 \notin [0; +\infty)$.**Rpta.: C****PROBLEMA 04:** Dadas las siguientes proposiciones:I. Las raíces de $e^{in} - 1 = 0$, pertenecen a un polígono regular de n lados, $\forall n \in \mathbb{N}$.II. Si $e^{i\theta} = a + bi$ y $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ entonces: $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $b \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$ III. Dados $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$ tales que $\beta > \alpha$, si $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$, entonces $e^{i(\alpha+\beta)} = 1$.

Indique cuáles son correctas:

A) Sólo I

B) Sólo II

C) Sólo III

D) I y II

E) II y III

Resolución:

I. FALSO

 $n=1$ no cumple $e^{in} - 1 = 0$ y no se tiene un polígono análogo para $n=2$.

II. FALSO

Se tiene:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = a + ib$$

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right) \text{ entonces}$$

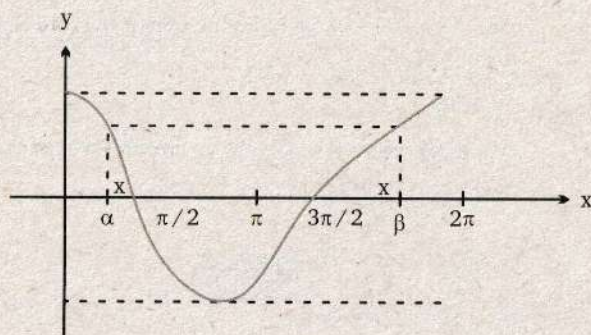
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\theta = a < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\theta = b \leq 1$$

III. VERDADERO

Sea:

$$2\pi > \beta > \alpha > 0$$



Se tiene:

$$\alpha = \pi/2 - x \quad \text{y} \quad \beta = 3\pi/2 + x$$

con

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

y

$$\alpha + \beta = 2\pi$$

$$\therefore e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i2\pi} = 1$$

Sólo es correcto III

Rpta.: C

PROBLEMA 05:

Sea S el conjunto solución de la ecuación, en $\mathbb{R}$, $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = \frac{1}{\log_x \left(\frac{3}{5} \right)}$

Halle la cantidad de elementos de S.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Resolución:

La ecuación toma la siguiente forma:

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = \log_{3/5} x$$

con

$$x > 0 \text{ y } x \neq 1$$

factorizando

$$p(x) = (x-1)(x-3)^3 = \log_{3/5} x$$

con

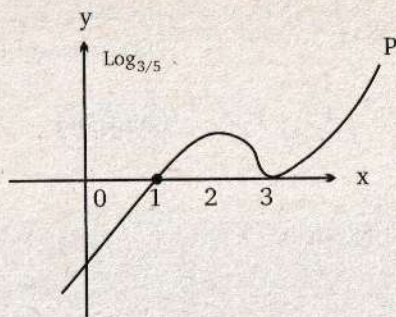
$$x > 0 \text{ y } x \neq 1$$

$x=1$ está descartado como solución

$x=3$ no es solución

$$S = \emptyset$$

Gráficamente se tiene:



Rpta.: A

PROBLEMA 06:

En un colegio el 60% aprobó aritmética, el 32% aprobó álgebra y los que aprobaron aritmética y álgebra representan el 60% de los que no aprobaron ninguno de los dos cursos. Si 42 aprobaron aritmética y álgebra, calcule el número de alumnos del colegio.

A) 340

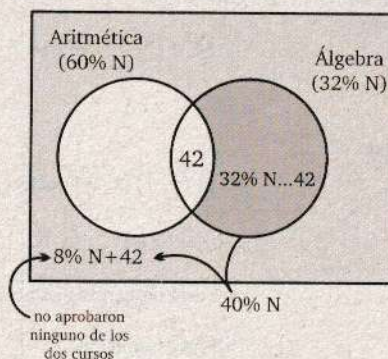
B) 350

C) 360

D) 370

E) 380

Resolución:



N: Número total de alumnos del colegio.

Por dato:

$$42 = 60\% (8\% N + 42)$$

$$N = 350$$

La cantidad de alumnos del colegio es 350.

Rpta.: B

PROBLEMA 07: Si:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Calcule } S = A^{42} + A^{55}$$

A) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

B) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

C) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

D) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

E) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Resolución:

$$\text{Si } A \in \mathbb{R}^{n \times n} : P_{(x)} = \det(A - xI)$$

Hallemos el polinomio característico de A

$$P_{(x)} = \det(A - xI)$$

$$P_{(x)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$P_{(x)} = \begin{vmatrix} (-1-x) & -1 & -1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & (1-x) \end{vmatrix}$$

$$P_{(x)} = x - x^3$$

Entonces:

$$P_{(A)} = A - A^3 = \phi \quad (\phi: \text{matriz nula})$$

$$\Leftrightarrow A^3 = A \quad \Leftrightarrow A^{3k} = A; \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

Reemplazamos en:

$$\begin{aligned} A^{42} + A^{55} &= (A^3)^{14} + (A^3)^{18} A \\ &= A + (A)A = A + A^2 \end{aligned}$$

Determinamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{La matriz } A^{42} + A^{55} \text{ es } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rpta.: B

PROBLEMA 08: Dado el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 4y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

¿Cuál de las siguientes ecuaciones

- I. $x - 5y - z = 2$,
 II. $3x + 3y + 3z = 2$,
 III. $5x + 2y + 4z = 1$,

puede agregarse al sistema anterior de modo que el conjunto solución no varíe?

- A) Sólo I
 D) Sólo II

B) I y II

- C) I y III
 E) Sólo III.

Resolución:

Del dato:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 4y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

- Al restar las ecuaciones

$$\begin{array}{r} 2x - y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ - \end{array}$$

Se obtiene $x - 5y - z = 2$ (*)

- Al sumar las ecuaciones

$$\begin{array}{r} 2x - y + z = 1 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ + \end{array}$$

Se obtiene $3x + 3y + 3z = 0$ (**)

- Multiplicamos por 2 a la primera ecuación y sumamos con la segunda ecuación.

$$\begin{array}{r} 4x - 2y + 2z = 2 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ + \end{array}$$

Se obtiene $5x + 2y + 4z = 1$ (***)

Las ecuaciones que se obtienen (*), (**) y (***) son equivalentes a las primeras.

Entonces, podemos indicar que las proposiciones I y III del problema coinciden con (*) y (**); en cambio, II no coincide con (**); entonces, no podemos agregarlo al sistema.

Podemos agregar las ecuaciones I y III.

Rpta.: C

PROBLEMA 09:

En relación a un programa lineal, indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

- I. Las condiciones de no negatividad significan que todas las variables de decisión deben ser positivas.
- II. El número de puntos extremos de la región admisible es finito.
- III. En un programa lineal pueden variarse los coeficientes de la función objetivo y aún mantenerse la solución óptima.

A) VFV

B) FFF

C) FFV

D) FVV

E) VFF

Resolución:

I. FALSO

Si x , y son variables de decisión, entonces por la condición de no negatividad se cumple que $x \geq 0$; $y \geq 0$.

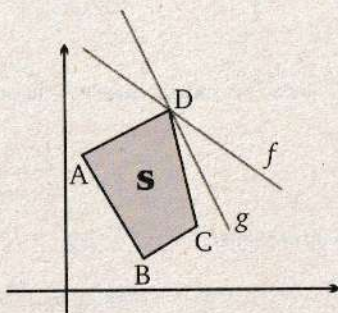
II. VERDADERO

Pues el número de vértices de toda región factible es finito.

III. VERDADERO

Pues dada la región factible S y la función objetivo $f(x; y) = ax + by + c$.

Supongamos que $(x_1; y_1) \in S$ es la solución óptima del problema, entonces puede ser también solución óptima de $g(x; y) = cx + dy + k$.



La secuencia correcta es FVV

Rpta.: D

PROBLEMA 10: Sea la sucesión:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{3}{4}, a_5 = \frac{5}{8}, a_6 = \frac{11}{16}, a_7 = \frac{21}{32}, a_8 = \frac{43}{64}, \dots,$$

entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a:

A) $\frac{7}{12}$

B) $\frac{5}{8}$

C) $\frac{2}{3}$

D) 1

E) ∞

Resolución:

Por dato se tiene:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{11}{16} & \dots \end{array}$$

Multipliquemos por 3 y dividimos entre 3 a cada término.

$$\frac{1}{3} \left[0; 3; \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; \frac{15}{8}; \frac{33}{16}; \dots \right]$$

$$\frac{1}{3} \left[0; \frac{2^1+1}{2^0}; \frac{2^2-1}{2^1}; \frac{2^3+1}{2^2}; \frac{2^4-1}{2^3}; \frac{2^5+1}{2^4}; \dots \right]$$

Entonces, tenemos la regla de formación.

$$a_n = \frac{1}{3} \left[2 + \left(\frac{-1}{2} \right)^{n-2} \right]; n \geq 2$$

Tomando límite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} \left(2 + \left(\frac{-1}{2} \right)^{n-2} \right) \right] = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, $\{a_n\}$ converge a $\frac{2}{3}$ **Rpta.: C**

PROBLEMA 11: Dadas las funciones:

$$f = \{(3;1), (2;-3), (5;0), (4;-4), (1;1)\},$$

$$g = \{(-4;3), (-2;7), (0;0), (1;5), (2;1)\} \text{ y}$$

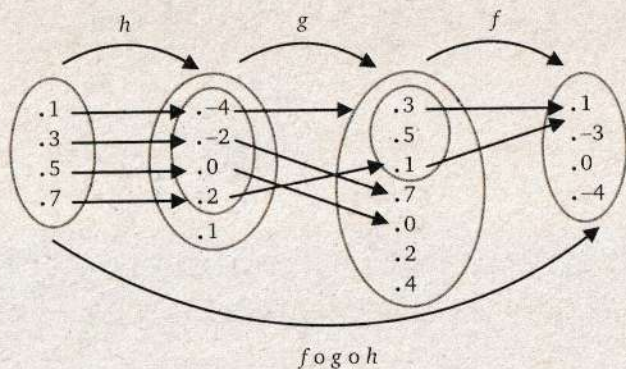
$$h = \{(1;4), (3;-2), (5;0), (7;2)\}.$$

Determine la función compuesta $f \circ g \circ h$.

- A) $\{(1;0), (5;1)\}$ B) $\{(3;-3), (5;-4)\}$ C) $\{(1;1), (7;1)\}$
 D) $\{(1;1), (2;-3)\}$ E) $\{(3;-1), (7;1)\}$

Resolución:

Usamos el diagrama sagital



De la figura se deduce:

$$f \circ g \circ h = \{(1;1), (7;1)\}$$

 $\therefore$ La función compuesta $f \circ g \circ h$ es $\{(1;1), (7;1)\}$
Rpta.: C

PROBLEMA 12: Considere la ecuación matricial

$$x \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ donde } x \text{ es una matriz.}$$

Calcule $\det(x)$.

A) 6

B) 7

C) 8

D) 11

E) 19

Resolución:

Aplicando la propiedad:

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, entonces $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Por dato se tiene que:

$$x \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left| x \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right|$$

$$|x| \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|x| \cdot 1 = 8$$

$$|x| = 8$$

 $\therefore$ El determinante de la matriz x es 8.**Rpta.: B****PROBLEMA 13:** Halle el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que la inecuación $(a^2 - 14)x^2 - 4 + 4a \leq 0$, tenga como solución el conjunto $[-2; 4]$.

A) -6

B) -4

C) -2

D) -1

E) $-\frac{1}{2}$

Resolución:

Piden el valor de $a \in \mathbb{R}$, tal que:

$$(a^2 - 14)x^2 - 4x + 4a \leq 0; \text{CS} = [-2; 4]$$

Entonces $a^2 - 14 > 0$; $-2 \wedge 4$ son los puntos críticos.

Aplicando la propiedad anterior:

$$-2 + 4 = \frac{-(-4)}{a^2 - 14} \wedge (-2)(4) = \frac{4a}{a^2 - 14}$$

Se tiene:

$$2(a^2 - 14) = 4 \wedge -2(a^2 - 14) = a$$

$$a^2 = 16 \wedge 2a^2 + a - 28 = 0$$

$$(a = 4 \vee a = -4) \wedge (2a - 7)(a + 4) = 0$$

$$(a = 4 \vee a = -4) \wedge \left(a = \frac{7}{2}, \vee a = -4 \right)$$

Por lo tanto, $a = -4$

Rpta.: B

PROBLEMA 14:

Dadas las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = |x-2| + 2$ y $g(x) = (x+2)^2$.
Determine $f+g$.

A)

$$\begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}, x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, x < 2 \end{cases}$$

B)

$$\begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}, x < 2 \end{cases}$$

C)

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, x \geq 2 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}, x < 2 \end{cases}$$

D)

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \frac{7}{4}, x \geq 2 \\ -(x+1)^2 - \frac{1}{4}, x < 2 \end{cases}$$

E)

$$\begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}, x < 2 \end{cases}$$

Resolución: Nos piden determinar $f+g$.

Datos:

$$f_{(x)} = |x-2| + 2 ; \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$g_{(x)} = -x^2 - 2 ; \text{Dom } g = \mathbb{R}$$

Entonces

$$(f+g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$$

Reemplazando los datos:

$$(f+g)_{(x)} = |x-2| - x^2$$

y además:

$$\text{Dom}(f+g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Redefiniendo la función:

$$(f+g)_{(x)} = \begin{cases} -x^2 + x - 2; & x \geq 2 \\ -x^2 - x + 2; & x < 2 \end{cases}$$

Completando cuadrados, obtenemos lo siguiente:

$$(f+g)_{(x)} = \begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}; & x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}; & x < 2 \end{cases}$$

Por tanto la suma es:

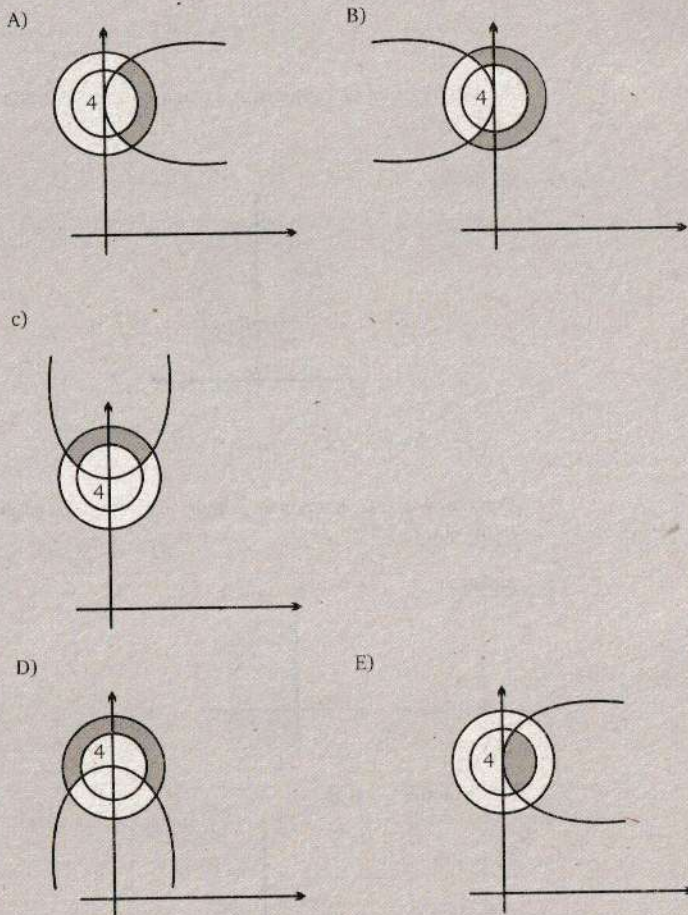
$$\begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}; & x \geq 2 \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}; & x < 2 \end{cases}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 15: Sean los números complejos $z=x+iy$ y $u=\sqrt{x}+iy$, $x > 0$ y los conjuntos

$$A = \{z/1 \leq |\bar{z}+4i| \leq 2\} \quad \text{y} \quad B = \{u=\sqrt{x}-iy/|u+4i| \geq 0\}$$

¿Cuál de las siguientes gráficas representa a $A \cap B$?



Resolución:

Hallamos las regiones determinadas por los conjuntos A y B.

$$A = \{z = x + yi / 1 \leq |\bar{z} + 4i| \leq 2\}$$

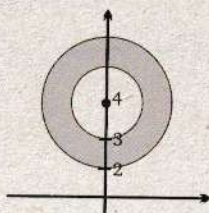
$$1 \leq |\bar{z} + 4i| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq |\overline{\bar{z} + 4i}| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq |z - 4i| \leq 2$$

Se observa que el conjunto A es una corona centrada en $z_0 = 4i$, de radios $r = 1 \wedge R = 2$.

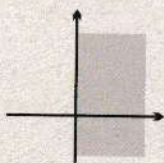
Es decir:



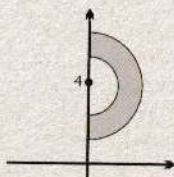
$$B = \{u = \sqrt{x} - yi / |u + 4i| \geq 0 \wedge x > 0\}$$

Como $|u + 4i| \geq 0$ siempre se cumple $\wedge x > 0$, entonces, B es un semiplano de puntos $(x; y)$, tal que $x > 0$.

Es decir:



Por lo tanto, $A \cap B$ es:

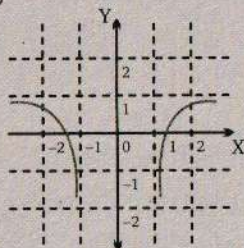


$\therefore$ Ninguna alternativa coincide.

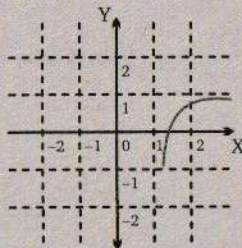
PROBLEMA 16: Señale cuál de las figuras representa adecuadamente la gráfica de la función:

$$f(x) = \log(|x|+1) + \log(|x|-1)$$

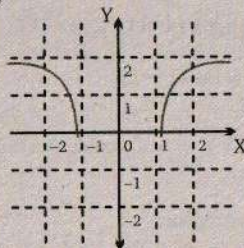
A)



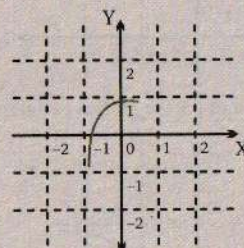
B)



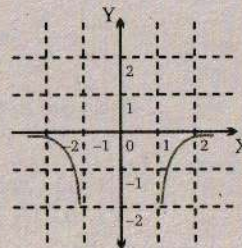
C)



D)



E)



Resolución:

I. La existencia de la función está garantizada cuando $|x| - 1 > 0$.

$$\rightarrow |x| > 1$$

$$\rightarrow x \in \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$$

Luego:

$$\text{Dom}(f) = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$$

II. La función es par.

En efecto, sea $x \in \text{Dom}(f)$.

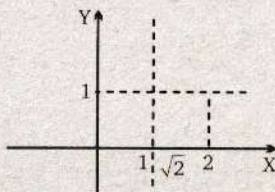
$$\begin{aligned} \rightarrow f_{(x)} &= \log(|x|+1) + \log(|x|-1) \\ &= \log(|-x|+1) + \log(|-x|-1) \\ &= f_{(-x)} \end{aligned}$$

III. Si $x \in \langle 1; +\infty \rangle$

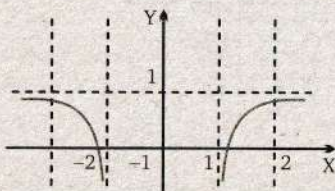
$$\begin{aligned} \rightarrow f_{(x)} &= \log(x+1) + \log(x-1) \\ &= \log(x^2-1) \end{aligned}$$

además, $x=1$ es una asíntota y $f_{(\sqrt{2})} = 0$ también es fácil de ver que $f_{(2)} < 1$.

Entonces, la gráfica de f es dada por:



Finalmente, como la función es par, su gráfica es dada por:



Rpta.: A

PROBLEMA 17: Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces $A - A^T = 0$.

II. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ entonces } A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ donde } n \text{ es un número natural.}$$

III. Si:

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+a & 5 \\ 1+b & 4 \end{bmatrix} \text{ entonces } a - b = 0$$

A) VVV

B) VVF

C) FFV

D) FVV

E) FFF

Resolución:

I. FALSO

Porque si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, no necesariamente $A = A^T$. Veamos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge$$

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

II. VERDADERO

En efecto, induciendo el resultado.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. VERDADERO

En efecto, operando tenemos.

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & 3a+2 \\ b+1 & 4 \end{bmatrix}$$

Igualando con el dato, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} a+2b & 3a+2 \\ b+1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+a & 5 \\ 1+b & 4 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow a+2b=2+a \wedge 3a+2=5$$

$$b=1 \wedge a=1$$

Entonces

$$a-b=0$$

Rpta.: D

PROBLEMA 18:

Halle el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que la inecuación $(a^2-14)x^2 - 4x + 4a \leq 0$, tenga como solución el conjunto $[-2; 4]$.

A) -6

B) -4

C) -2

D) -1

E) $-\frac{1}{2}$

Resolución:

Piden el valor de $a \in \mathbb{R}$, tal que:

$$(a^2-14)x^2 - 4x + 4a \leq 0; \text{ CS} = [-2; 4]$$

Entonces, $a^2-14 > 0$; $-2 \wedge 4$ son los puntos críticos.

Aplicando la propiedad anterior

$$-2+4 = \frac{-(-4)}{a^2-14} \wedge (-2)(4) = \frac{4a}{a^2-14}$$

Se tiene:

$$2(a^2-14) = 4 \wedge -2(a^2-14) = a$$

$$a^2 = 16 \wedge 2a^2 + a - 28 = 0$$

$$(a = 4 \vee a = -4) \wedge (2a - 7)(a + 4) = 0$$

$$(a = 4 \vee a = -4) \wedge \left(a = \frac{7}{2}, \vee a = -4 \right)$$

Por lo tanto:

$$a = -4$$

Rpta.: B

PROBLEMA 19: Dado los conjuntos:

$$A = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 / (a_1, a_2) \in [3, 4] \times [4, 5]\} \text{ y}$$

$$B = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 / b_1^2 + b_2^2 \leq 1\}$$

Si se define $A+B = \{\bar{a} + \bar{b} / \bar{a} \in A, \bar{b} \in B\}$, determine el área de $A+B$.

A) 1π

B) 2π

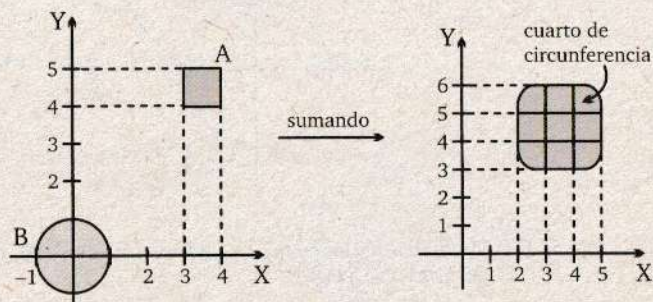
C) 3π

D) 5π

E) 6π

Resolución:

De la definición de $(A+B)$, la circunferencia se va a trasladar hacia la derecha y hacia arriba, entonces tendremos una gráfica aproximada:



Es decir un elemento de $A+B$ es (a_1+b_1, a_2+b_2) entonces el área de $A+B$ es:

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 5 + \pi$$

Rpta.: D

PROBLEMA 20: El conjunto solución del sistema:

$$x^2 - 2x - y = -1$$

es:

$$x^2 + y^2 = 1$$

- A) $\{(1,1), (2,-1), (1,0)\}$ B) $\{(1,2), (2,1), (1,-1)\}$ C) $\{(1,0), (-1,-1)\}$
 D) $\{(1,0), (0,1)\}$ E) $\{(-1,1), (1,-1)\}$

Resolución:

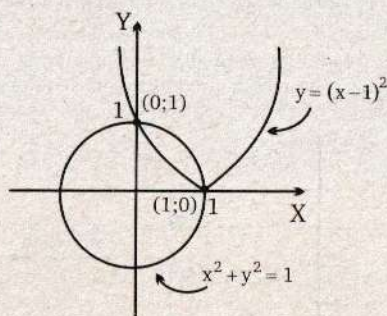
Se sabe:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Completando cuadrados en la primera ecuación, se tiene:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Graficando se obtiene:



Se observa que los puntos de corte son $(0; 1)$ y $(1; 0)$, y estas son las soluciones del sistema no lineal.

Por lo tanto, la respuesta es:

$$\{(1; 0), (0; 1)\}$$

Rpta.: D

PROBLEMA 20: Determine el valor mínimo que toma la función objetivo, $P(x, y) = 10x + 20y$ sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ y \leq x \end{cases}$$

A) -70

B) -20

C) 0

D) 20

E) 30

Resolución:

Piden el valor mínimo que toma la función.

$$P(x, y) = 10x + 20y$$

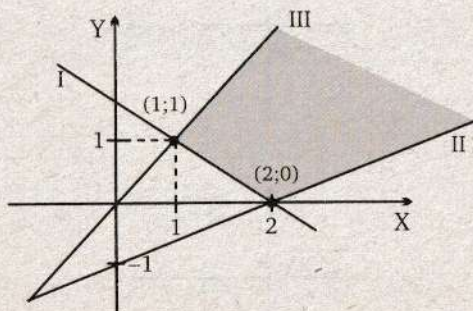
sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ y \leq x \end{cases}$$

Reordenando el conjunto de restricciones.

$$\begin{cases} y \geq -x + 2 & \text{I} \\ y \geq \frac{x-2}{2} & \text{II} \\ y \leq x & \text{III} \end{cases}$$

Ahora, graficamos el conjunto de restricciones:



Luego, el valor mínimo que toma la función objetivo $P(x;y)$ se encontrará en un vértice o dos vértices consecutivos. En este caso, los vértices son $(1; 1)$ y $(2;0)$.

Evalutando en $P(x;y)=10x+20y$, se obtienen:

$$P(1;1)=30$$

$$P(2;0)=20$$

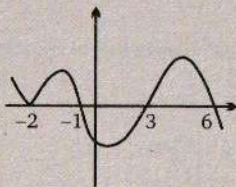
Luego, el valor mínimo que toma la función objetivo $P(x; y)$ es 20.

Rpta.: D

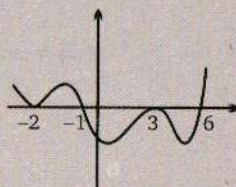
PROBLEMA 21: Determine la gráfica que corresponde a la función:

$$f(x)=(x+2)(x+1)^3(x-3)^6(x-6)^5$$

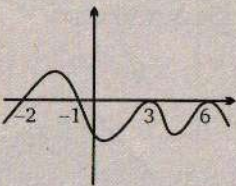
A)



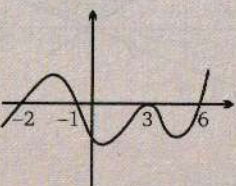
B)



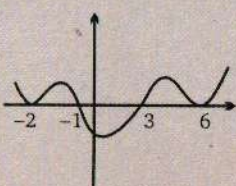
C)



D)



E)



Resolución:

Se observa que:

6 es raíz de multiplicidad impar.

-1 es raíz de multiplicidad impar.

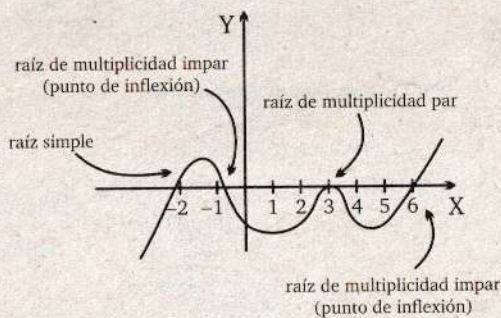
3 es raíz de multiplicidad par.

-2 es raíz simple.

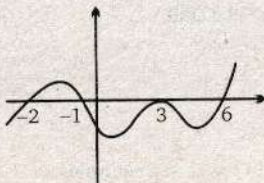
Además si

$$x > 6 \rightarrow f(x) > 0$$

Entonces, tenemos que la gráfica aproximada es:



Por lo tanto la gráfica correcta es:

**Rpta.: D**

PROBLEMA 22: Sean p, q, r proposiciones lógicas. Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

II. $(p \rightarrow q) \vee p \equiv q$

III. $q \wedge (p \rightarrow \sim q) \equiv \sim (q \rightarrow p)$

A) VVV

B) VFV

C) FVF

D) FFV

E) FFF

Resolución:

I. FALSA

$$\begin{array}{c} \underbrace{(p \rightarrow q) \rightarrow r}_{\sim p \vee q} \equiv p \rightarrow \underbrace{(q \rightarrow r)}_{\sim q \vee r} \\ \hline (p \wedge \sim q) \vee r \quad \sim p \vee \sim q \vee r \end{array}$$

Por lo tanto, no son equivalentes.

II. FALSA

$$\begin{array}{c} \underbrace{(p \rightarrow q) \vee p}_{\sim p \vee q} \equiv q \\ \hline \text{verdadero} \end{array}$$

Por lo tanto, no son equivalentes.

III. VERDADERA

$$\begin{array}{c} \underbrace{q \wedge (p \rightarrow \sim q)}_{\sim p \vee \sim q} \equiv \underbrace{\sim (q \rightarrow p)}_{\sim q \vee p} \\ \hline q \wedge \sim p \quad q \wedge \sim p \end{array}$$

Por lo tanto, son equivalentes.

Rpta.: D

UNMSM - 2011 - I

PROBLEMA 23: Si $b > 0$, $a^2 \leq b$ y $1 \leq \frac{a + \sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$; determine: $\sqrt{b} + a$

A) $3a$ B) $2b$ C) $2\sqrt{ab}$ D) 2 E) $2a$ **Resolución:**

Datos: $b > 0$, $a^2 \leq b$ y $1 \leq \frac{a + \sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$

De: $a^2 \leq b \Rightarrow -\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b} \dots (\alpha)$

De: $1 \leq \frac{a + \sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$

Como: $b > 0 \Rightarrow 2\sqrt{b} > 0$

$$\Rightarrow 2\sqrt{b} \leq a + \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b} \leq a \dots (\beta)$$

De (α) y (β) : $a = \sqrt{b}$

Nos piden: $\therefore \sqrt{b} + a = a + a = 2a$

Rpta.: E

PROBLEMA 24: Halle el resto de dividir: $4(3x - 7)^8 - (3x - 5)^5 + 8$ por $x - 3$, en $R[x]$.

A) 32 B) -16 C) 8 D) -5 E) 12 **Resolución:**

Sea: $P(x) = 4(3x - 7)^8 - (3x - 5)^5 + 8$

Por teorema del resto, para $x = 3$:

$$\Rightarrow R(x) = 4[3(3) - 7]^8 - [3(3) - 5]^5 + 8$$

$$R(x) = 2^{10} - 2^{10} + 8$$

$$\therefore R(x) = 8$$

Rpta.: C

PROBLEMA 25: Una joven debe lavar n docenas de camisas; recibirá a nuevos soles por cada camisa bien lavada y pagará b nuevos soles por cada camisa mal lavada. Si recibió m nuevos soles en total, ¿cuántas camisas fueron mal lavadas?

A) $\frac{m+12an}{a+b}$

B) $\frac{an-m}{a+b}$

C) $\frac{m-an}{12a+b}$

D) $\frac{12an-m}{a+b}$

E) $\frac{12am-n}{a+b}$

Resolución:

Sean: x : camisas bien lavadas.

y : camisas mal lavadas.

Por condición: $x + y = 12n$

También: $ax - by = m$

Resolviendo el sistema:

$$\therefore y = \frac{12an - m}{a + b}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 26: Sea $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, indique el polinomio cuya raíz es α^2 .

A) $x^2 + \sqrt{5}x + 1$

B) $x^6 - 2x + 2$

C) $x^4 + \sqrt{2}x + \sqrt{5}$

D) $x^4 + \sqrt{5}x + \sqrt{2}$

E) $x^2 - 14x + 9$

Resolución:

Sea: $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \alpha^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow \alpha^2 = 7 + 2\sqrt{10}$$

Por teoría la otra raíz será: $7 - 2\sqrt{10}$

Reconstruyendo el polinomio:

$$P(x) = [x - (7 + 2\sqrt{10})][x - (7 - 2\sqrt{10})]$$

$$\therefore P(x) = x^2 - 14x + 9$$

Rpta.: E

PROBLEMA 27: Los números positivos x e y satisfacen el sistema:

$$2 \log_3 x + 2 \log_3 y = 0$$

$$\log_2 x - \log_2 y = 2$$

halle: $x + y$.

A) $\frac{9}{4}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{5}{2}$

D) 1

E) $\frac{4}{5}$

Resolución:

Sea el sistema:

$$2 \log_3 x + 2 \log_3 y = 0 \quad \dots(\alpha)$$

$$\log_2 x - \log_2 y = 2 \quad \dots(\beta)$$

De (α) :

$$2 \log_3 x + 2 \log_3 y = 0$$

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 y = 0$$

$$\Rightarrow \log_3 (xy) = 0$$

$$\Rightarrow xy = 1 \quad \dots(I)$$

De (β) :

$$\log_2 x - \log_2 y = 0$$

$$\Rightarrow \log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = 4 \quad \dots(II)$$

De (II) en (I) :

$$x \left(\frac{x}{4} \right) = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 2 \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Nos piden:

$$\therefore x + y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 28: Sea f una función definida por $f(x) = (1 - x^3)^{1/3} + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Determine la inversa f^{-1} de f .

A) $f^{-1}(x) = 1 - (x^2 - 1)^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$

B) $f^{-1}(x) = 1 - (x - 1)^{3/2}$, $x \in [0, +\infty)$

C) $f^{-1}(x) = (1 - x^3)^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$

D) $f^{-1}(x) = (1 - (x - 1)^3)^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$

E) $f^{-1}(x) = (1 - (x - 1)^{1/3})^3$, $x \in [0, +\infty)$

Resolución:

Se tiene $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3} + 1$, $x \in \mathbb{R}$

Luego:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$$

Sea $y = \sqrt[3]{1 - x^3} + 1$

Despejamos y en función de x .

$$\sqrt[3]{1 - x^3} = y - 1$$

$$1 - x^3 = (y - 1)^3$$

$$x = \sqrt[3]{1 - (y - 1)^3}$$

Luego:

$$f^{-1}_{(x)} = \sqrt[3]{1 - (x - 1)^3}, \text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

Nos piden f^{-1}

$$f^{-1}_{(x)} = (1 - (x - 1)^3)^{1/3}, x \in \mathbb{R}$$

Rpta.: D

PROBLEMA 29: Considere $S_n = i + i^2 + i^3 + \dots + i^n$, donde $i^2 = -1$, con $n \in \mathbb{N}$. Dadas las siguientes proposiciones.

- I. $S_n + S_{n+1} = i$, si n es impar.
- II. $S_n = S_{n-1} + S_{n+1}$, si n es par.
- III. $S_n = -1$, si n tiene la forma $n = 4k + 3$, con k entero no negativo.

Son correctas :

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) I y II
- E) I y III

Resolución:

Tenemos que $S_n = i + i^2 + i^3 + \dots + i^n$

$$S_n = \begin{cases} 0 & ; \quad n = 4 \\ i & ; \quad n = 4 + 1 \\ i - 1 & ; \quad n = 4 + 2 \\ -1 & ; \quad n = 4 + 3 \end{cases}$$

- I. Falso

Consideremos $n = 1$

$$S_1 + S_2 = i + i - 1 = 2i - 1$$

- II. Falso

Consideremos $n = 4$

$$S_4 = 0$$

$$S_3 = -1$$

$$S_5 = i$$

$$S_3 + S_5 = -1 + i \neq S_4 = 0$$

- III. Verdadero

Si $S_n = -1$ del análisis inicial, entonces $n = 4 + 3$ es decir, $n = 4k + 3$; $k \in \mathbb{Z}$.

Luego, en particular, la proposición se verifica para $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Por lo tanto, la proposición correcta es solo III.

Rpta.: C

- | | |
|----|---|
| 1 | Leyes de Exponentes - Ecuaciones Exponenciales |
| 2 | El polinomio - Productos Notables |
| 3 | División Algebraica - Divisibilidad Algebraica |
| 4 | Factorización - Fracciones |
| 5 | Radicación - Racionalización |
| 6 | Potencia de un Binomio - Factorial de un Número -Combinatoria |
| 7 | Números Complejos |
| 8 | Ecuaciones |
| 9 | Desigualdades - Inecuaciones |
| 10 | Relaciones - Funciones |
| 11 | Función Exponencial - Logaritmación |
| 12 | Sucesiones - Series |
| 13 | Matrices - Determinantes |
| 14 | Sistema de Ecuaciones |
| 15 | Programación Lineal - Gráficas de Relaciones |

Teléfonos: 424 - 6350

992 - 796104



/ fondoeditorialrodo

editorialrodo@gmail.com



N°

TEMA

1

Leyes de Exponentes, Ecuaciones Exponenciales